UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

[MOD-MAX] Equações de Maxwell e Ondas Planas

Da Síntese Eletrodinâmica à Propagação em Meios Materiais

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-FOTON

Sumário da Apresentação

1. Introdução e o Espectro Eletromagnético
2. As Equações de Maxwell no Domínio do Tempo
3. Condições de Contorno em Interfaces Materiais
4. Dedução Analítica da Equação de Onda
5. Ondas Eletromagnéticas Planas Uniformes (TEM)
6. Regime Fasorial e Meios Sem Perdas
7. Propagação em Meios Materiais com Perdas
8. Regimes Limítrofes: Dielétricos vs. Condutores
9. Teorema de Poynting e Polarização
10. Síntese e Próximos Passos

James Clerk Maxwell (1831–1879)

J. C. Maxwell ainda jovem.

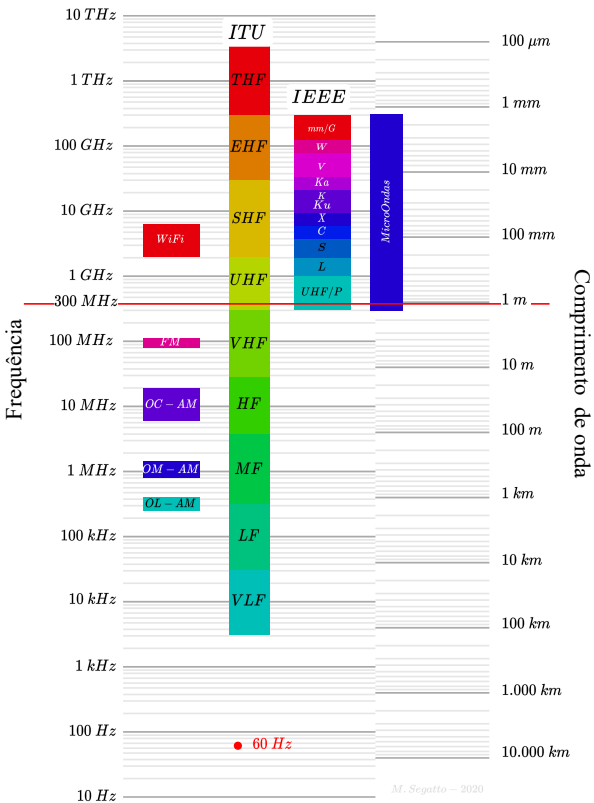
O Espírito Científico e Investigativo

"O estudante que usa equipamentos caseiros, que sempre dá errado, muitas vezes aprende mais do que quem usa instrumentos cuidadosamente ajustados, nos quais ele pode confiar e que não ousa desmontar."

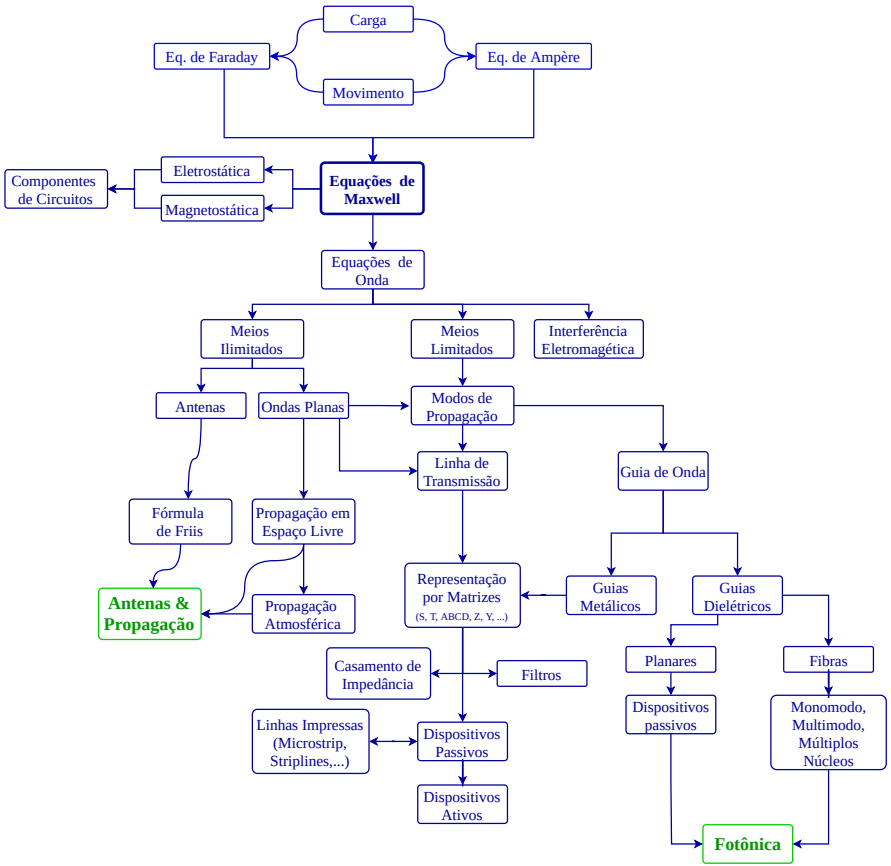
O Papel da Humildade Epistemológica

"A ignorância completamente consciente é o prelúdio de todo avanço real na ciência."

O Espectro Eletromagnético e Aplicações



Fluxograma do Aprendizado em Eletromagnetismo



As Equações de Maxwell: Formas Integral e Diferencial

Formulação Macroscópica Fundamental

Lei Física	**Forma Integral**	**Forma Diferencial**
Faraday	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ampère-Maxwell	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Gauss Elétrica	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_v \, dv$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$
Gauss Magnética	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

As Equações Diferenciais de Maxwell

Lei de Faraday-Lenz (Indução eletromagnética):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

Lei de Ampère-Maxwell (Fontes de circuitação magnética):

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{2}$$

Lei de Gauss para o Campo Elétrico (Fontes de fluxo elétrico):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \tag{3}$$

Lei de Gauss para o Campo Magnético (Inexistência de monopolo):

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4}$$

Conservação de Carga e Corrente de Deslocamento

Tomando a divergência do rotacional na Lei de Ampère estática ($\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \equiv 0 \implies \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

o que viola a **Equação da Continuidade** para campos variáveis no tempo:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

A Solução Teórica de Maxwell (1861)

Substituindo a Lei de Gauss ($\rho_v = \nabla \cdot \vec{D}$):

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) = \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

O termo $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ representa a **Corrente de Deslocamento**, viabilizando a propagação de ondas eletromagnéticas.

Relações Constitutivas da Matéria

As equações de Maxwell relacionam quatro campos fundamentais $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H})$ e a densidade de corrente $\vec{J}$. Para fechar o sistema, incorporam-se as respostas macroscópicas dos meios:

Meios Lineares, Isotrópicos e Homogêneos (LIH)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{6}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{7}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{(Lei de Ohm microscópica)} \tag{8}$$

Nota física: Os parâmetros constitutivos ε, μ e σ podem variar com o espaço (meios não homogêneos), com a direção (anisotropia), com a frequência (dispersão) e com a amplitude do campo (não-linearidade).

O Rotacional de um Campo em Coordenadas Retangulares

O operador rotacional ($\nabla\times$) em coordenadas cartesianas é formalmente expresso pelo determinante simbólico:

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_x, A_y, A_z) = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z$$

Esta operação projeta a circuitação infinitesimal por unidade de área sobre os planos de coordenadas yz, xz e xy.

As Equações de Maxwell em Coordenadas Retangulares

Aplicando o rotacional às Leis de Faraday e Ampère-Maxwell, obtemos o sistema de 6 equações diferenciais acopladas fundamentais:

Lei de Faraday

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{9a}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{9b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{9c}$$

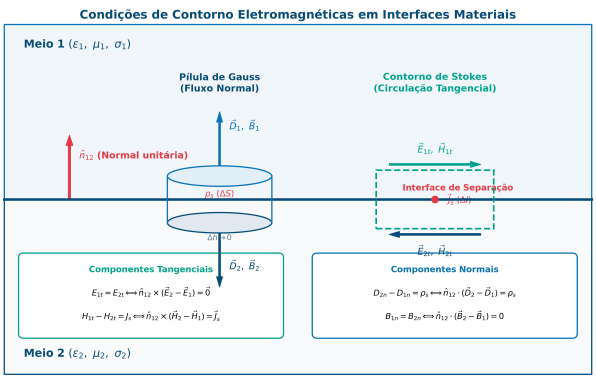
Lei de Ampère-Maxwell

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{10a}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{10b}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{10c}$$

Condições de Contorno em Interfaces Materiais



Componentes Tangenciais

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0} \iff E_{1t} = E_{2t}$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \iff H_{1t} - H_{2t} = J_s$$

Componentes Normais

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \iff D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \iff B_{1n} = B_{2n}$$

Condições de Contorno com Condutores Perfeitos (PEC)

No interior de um **Condutor Elétrico Perfeito (PEC)**, a condutividade infinita ($\sigma \to \infty$) anula todos os campos dinâmicos internos: $\vec{E}_2 = \vec{0}$ e $\vec{H}_2 = \vec{0}$.

Regras de Fronteira na Superfície de um PEC (Meio 1 / PEC)

Campo Elétrico:

- $E_{1t} = 0$ (tangencial nulo)
- $D_{1n} = \rho_s$ (normal induz carga)

Campo Magnético:

- $H_{1t} = J_s$ (tangencial induz corrente)
- $B_{1n} = 0$ (normal nulo)

Aplicação Prática: O campo elétrico é sempre puramente **normal** à superfície condutora ideal, enquanto o campo magnético é estritamente **tangencial**.

O Que é uma Equação de Onda?

Uma equação diferencial parcial de onda clássica no espaço-tempo satisfaz à relação hiperbólica homogênea:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

onde $\psi(z,t)$ representa a perturbação de campo, e v é a velocidade de propagação de fase da onda.

Forma Multidimensional Tridimensional

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{12}$$

onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador Laplaciano escalar.

Dedução da Equação de Onda Eletromagnética: Passo 1

Partimos da Lei de Faraday no domínio do tempo:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Tomando o rotacional de ambos os lados da equação:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{13}$$

Aplicando a identidade vetorial clássica do duplo rotacional:

Identidade Vetorial Fundamental

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \tag{14}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Dedução da Equação de Onda Eletromagnética: Passo 2

Como as derivadas espaciais e temporais são contínuas e independentes, os operadores lineares comutam:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \tag{15}$$

Utilizando a relação constitutiva $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e substituindo a Lei de Ampère-Maxwell ($\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$):

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \tag{16}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{17}$$

Dedução da Equação de Onda: Forma Homogênea

Em um meio dielétrico ideal, sem cargas livres ($\rho_v = 0$) e sem correntes de condução ($\vec{J} = \vec{0}$):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v = 0 \implies \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Substituindo $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$, obtemos a célebre:

Equação de Onda Eletromagnética Homogênea para $\vec{E}$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{18}$$

Por perfeita dualidade, aplicando o rotacional na Lei de Ampère-Maxwell:

Equação de Onda Eletromagnética Homogênea para $\vec{H}$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0} \tag{19}$$

Comparando a equação obtida com a EDP geral de onda ($\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$):

$$\frac{1}{v^2} = \mu\varepsilon \implies v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \tag{20}$$

Constantes Fundamentais no Vácuo

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \times 10^{-12}\ \text{F/m}, \qquad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 2{,}99792 \times 10^{8}\ \text{m/s} \approx 300.000\ \text{km/s} \tag{21}$$

Síntese Histórica: Maxwell demonstrou que a luz é uma onda eletromagnética de altíssima frequência.

Equações Escalares de Onda para o Campo Elétrico

Em coordenadas retangulares, o Laplaciano vetorial decompõe-se no Laplaciano de cada componente escalar:

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{a}_x + \nabla^2 A_y \hat{a}_y + \nabla^2 A_z \hat{a}_z \tag{22}$$

Substituindo na equação vetorial (18), obtemos três equações desacopladas para $\vec{E}$:

Equações de Onda Escalares (E_x, E_y, E_z)

$$\nabla^2 E_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{23a}$$

$$\nabla^2 E_y - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \tag{23b}$$

$$\nabla^2 E_z - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \tag{23c}$$

Equações Escalares de Onda para o Campo Magnético

De forma inteiramente análoga para o campo magnético $\vec{H}$ em meio sem cargas e sem correntes livres:

Equações de Onda Escalares (H_x, H_y, H_z)

$$\nabla^2 H_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0 \tag{24a}$$

$$\nabla^2 H_y - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \tag{24b}$$

$$\nabla^2 H_z - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \tag{24c}$$

Cada uma das 6 componentes cartesianas oscila e se propaga de modo independente no espaço tridimensional.

Expansão Tridimensional Completa das Equações de Onda

Expandindo explicitamente o operador Laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{25a}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \tag{25b}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \tag{25c}$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0 \tag{25d}$$

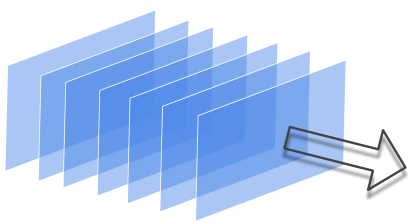
$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \tag{25e}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \tag{25f}$$

O Que São Ondas Planas?

Definições Fundamentais:

- É uma onda cujas grandezas físicas dependem de **uma única coordenada espacial**, além do tempo.
- As superfícies de fase constante (frentes de onda) formam planos paralelos infinitos perpendiculares à direção de propagação.
- **Onda Plana Uniforme:** Amplitude e fase são uniformes em qualquer plano transversal perpendicular ao movimento.

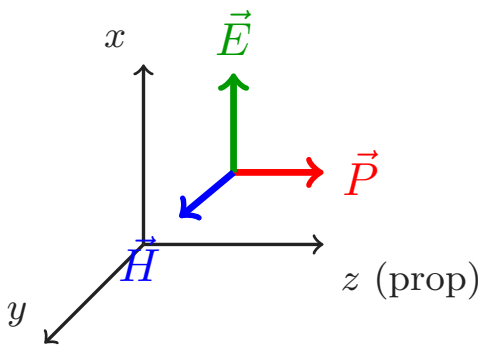


Frentes de onda planares.

Propriedades das Ondas Planas (Modos TEM)

- **Monocromática:** Frequência e comprimento de onda constantes.
- **Modo TEM (Transverso Eletromagnético):** $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são ortogonais entre si e rigorosamente **perpendiculares** à direção de propagação.
- Ausência de componentes longitudinais no sentido de propagação:

$$E_z = 0 \quad \text{e} \quad H_z = 0$$



Triedro $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{P})$ ortogonal.

Geometria Canônica: Propagação ao Longo do Eixo z

Adotando por convenção didática que a onda se propaga ao longo do **eixo** z, com campo elétrico polarizado na direção do **eixo** x:

$$\vec{E}(z,t) = E_x(z,t)\hat{a}_x \implies E_y = 0, \quad E_z = 0$$

Como a frente de onda é uniforme em x e y, todas as derivadas transversais se anulam:

$$\frac{\partial}{\partial x} \to 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \to 0$$

Pela Lei de Faraday, o campo magnético associado possui componente exclusivamente no **eixo** y:

$$\vec{H}(z,t) = H_y(z,t)\hat{a}_y \implies H_x = 0, \quad H_z = 0$$

Equações de Maxwell e de Onda Reduzidas

Maxwell Reduzidas (1ª Ordem)

Do sistema rotacional original restam apenas duas equações acopladas:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{26a}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{26b}$$

Equações de Onda 1D (2ª Ordem)

Desacoplando as equações ao lado:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{27a}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0 \tag{27b}$$

Solução Geral de d'Alembert no Domínio do Tempo

A solução analítica geral das equações de onda unidimensionais (27a) e (27b) é a clássica **solução de d'Alembert**:

$$E_x(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt) \tag{28}$$

onde f e g são funções com perfis de onda arbitrários determinados pelas condições iniciais e de contorno:

Interpretação Cinemática do Movimento Ondulatório

- $f(z - vt)$**:** Onda progressiva deslocando-se no sentido $+z$;
- $g(z + vt)$**:** Onda regressiva deslocando-se no sentido $-z$.

Campos Harmônicos no Tempo e Regime Fasorial

Para excitação senoidal pura em frequência angular ω, representamos as grandezas no domínio fasorial com a convenção $e^{j\omega t}$:

$$e_x(z,t) = \Re\left[\dot{E}_x(z)e^{j\omega t}\right] \tag{29}$$

As derivadas no tempo convertem-se em multiplicações algébricas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow j\omega, \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \longrightarrow -\omega^2$$

Substituindo na equação de onda temporal, obtemos a:

Equação de Helmholtz Homogênea Unidimensional

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{E}_x = 0 \tag{30}$$

Parâmetros Intrínsecos de Onda: Meios Sem Perdas

Para um meio dielétrico ideal sem condutividade ($\sigma = 0$):

Constante de Propagação Imaginária Pura ($\gamma = j\beta$)

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu\varepsilon \implies \gamma = \alpha + j\beta = j\beta \tag{31}$$

onde a atenuação é nula ($\alpha = 0$) e a **constante de fase** é:

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{32}$$

Impedância Intrínseca do Meio (η)

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad [\Omega], \qquad \text{No vácuo: } \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi \approx 377\,\Omega \tag{33}$$

Solução Fasorial das Ondas Planas Sem Perdas

A solução analítica da Equação de Helmholtz unidimensional é:

$$\dot{E}_x(z) = C_1 e^{-\gamma z} + D_1 e^{\gamma z} = C_1 e^{-j\beta z} + D_1 e^{+j\beta z} \tag{34}$$

Substituindo $\dot{E}_x(z)$ na Lei de Faraday fasorial ($\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = -j\omega\mu\dot{H}_y$):

$$\dot{H}_y(z) = \frac{1}{\eta}\left[C_1 e^{-j\beta z} - D_1 e^{+j\beta z}\right] \tag{35}$$

C_1 e D_1 são amplitudes complexas. O sinal negativo no termo D_1 assegura a propagação de potência física no sentido $-z$.

Reconstrução Temporal: Onda Progressiva em $+z$

Considerando propagação na direção $+z$ ($D_1 = 0$, com amplitude $C_1 = A_1 e^{j\phi}$):

Representações Temporal e Fasorial

Vetores Fasoriais:

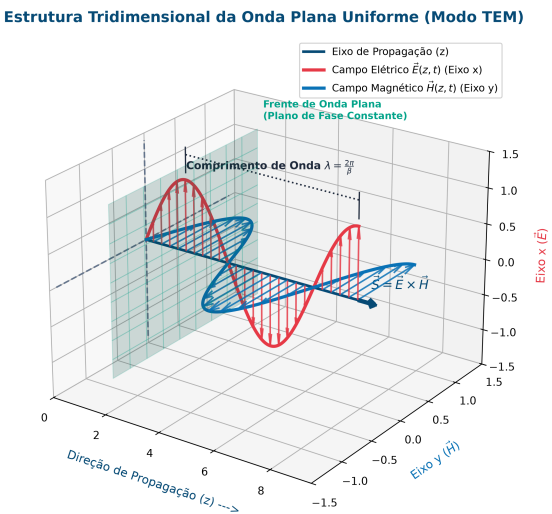
$$\tilde{E} = A_1 e^{-j\beta z} e^{j\phi} \hat{a}_x$$

$$\tilde{H} = \frac{A_1}{\eta} e^{-j\beta z} e^{j\phi} \hat{a}_y$$

Campos Instantâneos no Tempo:

$$\vec{E} = A_1 \cos(\omega t - \beta z + \phi) \hat{a}_x$$

$$\vec{H} = \frac{A_1}{\eta} \cos(\omega t - \beta z + \phi) \hat{a}_y$$



Ondas em Meios com Perdas: Domínio do Tempo

Em meios materiais condutores ($\sigma > 0$), a inclusão da corrente de condução ($\vec{J} = \sigma\vec{E}$) na Lei de Ampère introduz perdas por Efeito Joule:

$$\nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \tag{36}$$

Para onda plana unidimensional ao longo de z com polarização em x:

Equação Telegrafista da Onda com Dissipação

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \tag{37}$$

O termo de primeira ordem $-\mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t}$ causa atenuação espacial progressiva da onda.

Ondas em Meios com Perdas: Regime Fasorial

Convertendo a equação diferencial para o domínio fasorial ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$):

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \dot{E}_x - j\omega\mu\sigma \dot{E}_x = 0 \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - [j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)]\dot{E}_x = 0 \tag{39}$$

Equação de Helmholtz Geral com Perdas

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \dot{E}_x = 0 \tag{40}$$

com a **Constante de Propagação Complexa**:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \tag{41}$$

Expressões Analíticas Exatas de α, β e η

Separando as partes real e imaginária da raiz de γ, deduzem-se as fórmulas canônicas:

Constante de Atenuação (α) e de Fase (β)

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \quad [\text{Np/m}] \tag{42}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \quad [\text{rad/m}] \tag{43}$$

Impedância Intrínseca Complexa (η)

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\varepsilon}} = |\eta|e^{j\theta_\eta} \quad [\Omega], \qquad 0 \leq \theta_\eta \leq \frac{\pi}{4} \tag{44}$$

Forma Temporal da Onda Amortecida

Considerando onda progressiva $+z$ no meio dissipativo ($C_1 = A_1 e^{j\phi}$):

Solução Fasorial Atenuada

$$\tilde{E} = C_1 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{a}_x \tag{45}$$

$$\tilde{H} = \frac{C_1}{|\eta| e^{j\theta_\eta}} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{a}_y \tag{46}$$

Solução Instantânea no Domínio do Tempo

$$\vec{E}(z,t) = A_1 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi) \hat{a}_x \tag{47}$$

$$\vec{H}(z,t) = \frac{A_1}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi - \theta_\eta) \hat{a}_y \tag{48}$$

Propriedades: O fator $e^{-\alpha z}$ dissipa a energia ao longo do trajeto, e $\vec{H}$ atrasa de θ_η em relação a $\vec{E}$.

Regimes Limítrofes: Condutores vs. Dielétricos

Aproximações Analíticas para Altas e Baixas Perdas (Slide 32)

Bons Condutores

Critério: $\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \gg 1$

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle \pi/4$$

Profundidade Pelicular:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Bons Dielétricos

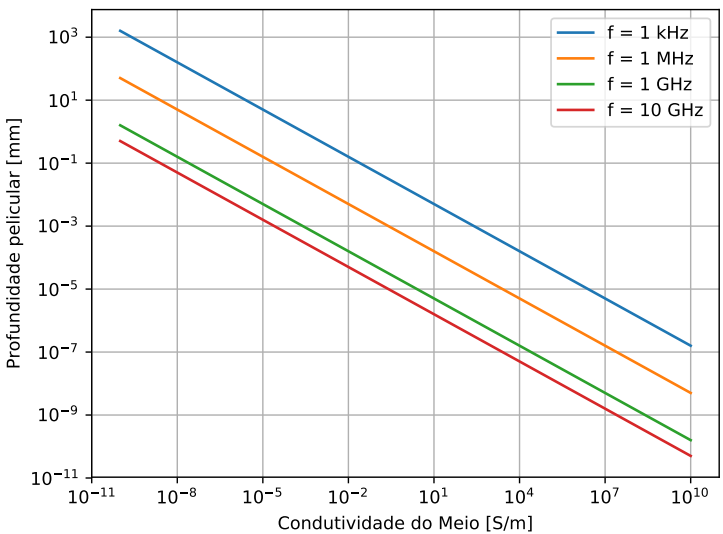
Critério: $\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \ll 1$

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right)$$

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)$$

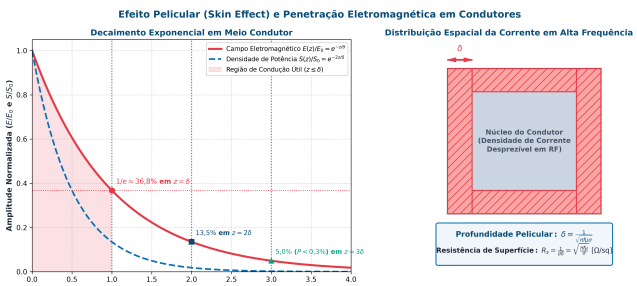
Profundidade Pelicular (Efeito Skin)



$\delta = 1/\alpha$ é a distância percorrida na qual o campo cai para $1/e \approx 36{,}8\%$ de seu valor superficial.

Distribuição de Corrente e Efeito Skin

Confinamento de Corrente em Condutores em Alta Frequência



Implicações Tecnológicas

- Em DC, a corrente $\vec{J}$ distribui-se uniformemente por toda a seção condutora.
- Em RF e micro-ondas, as correntes confinam-se na camada externa de espessura δ.
- Consequência: a resistência efetiva R_{ac} cresce com $\sqrt{f}$, aumentando a atenuação de linhas e guias metálicos.

Teorema de Poynting: Conservação da Energia

Aplicando a identidade $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H})$ às Leis de Maxwell:

Balanço Energético Diferencial

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) \tag{49}$$

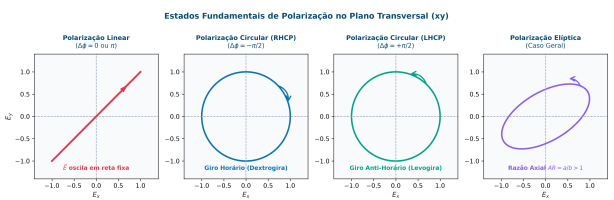
Vetor de Poynting e Densidade de Potência Média

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [\mathrm{W/m^2}], \qquad \vec{S}_{\text{méd}} = \frac{1}{2}\Re\left\{\tilde{E} \times \tilde{H}^*\right\} \tag{50}$$

Para onda progressiva plana em meio com perdas:

$$\vec{S}_{\text{méd}} = \frac{|E_0|^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\theta_\eta)\hat{a}_z \quad [\mathrm{W/m^2}] \tag{51}$$

Estados de Polarização de Ondas Planas



Classificação pelo Locus de $\vec{E}$

- **Linear:** Eixos em fase ($\Delta\phi = 0$ ou π). A ponta do vetor $\vec{E}$ oscila em linha reta.
- **Circular:** Amplitudes iguais ($E_{0x} = E_{0y}$) e quadratura de fase ($\Delta\phi = \pm 90°$):
  - RHCP: Sentido horário (destra)
  - LHCP: Sentido anti-horário (levógira)
- **Elíptica:** Caso mais geral (amplitudes ou fases quaisquer).

Síntese das Competências do Módulo 2

Conceitos Fundamentais Consolidados

- **Equações de Maxwell:** Formulações integral e diferencial, conservação de carga e corrente de deslocamento;
- **Equação de Onda:** Dedução analítica formal e velocidade de propagação $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$;
- **Ondas Planas TEM:** Caráter transverso, impedância intrínseca (η) e comprimento de onda (λ);
- **Meios com Perdas:** Constante complexa $\gamma = \alpha + j\beta$, perdas Joule e efeito skin (δ);
- **Potência e Polarização:** Vetor de Poynting ($\vec{S}$) e estados de polarização (linear, circular e elíptica).

Próximos Passos: Módulo 3

Reflexão e Refração de Ondas Eletromagnéticas

O Que Ocorre Quando a Onda Atinge uma Interface Material?

- **Incidência Normal:** Coeficientes de reflexão (Γ) e transmissão (τ);
- **Casamento de Impedâncias:** Relações entre impedâncias de onda intrínsecas dos dois meios (η_1, η_2);
- **Incidência Oblíqua:** Polarizações TE (senoidal) e TM (paralela), Leis de Snell-Descartes;
- **Fenômenos Especiais:** Ângulo de Brewster (polarização total) e reflexão interna total (ondas evanescentes);
- **Meios Estratificados:** Camadas finas e revestimentos multicamadas antirreflexo.