

[MOD-REF] Reflexão e Refração de Ondas Eletromagnéticas

Incidência Normal, Meios Estratificados e
Equações de Fresnel

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-FOTON

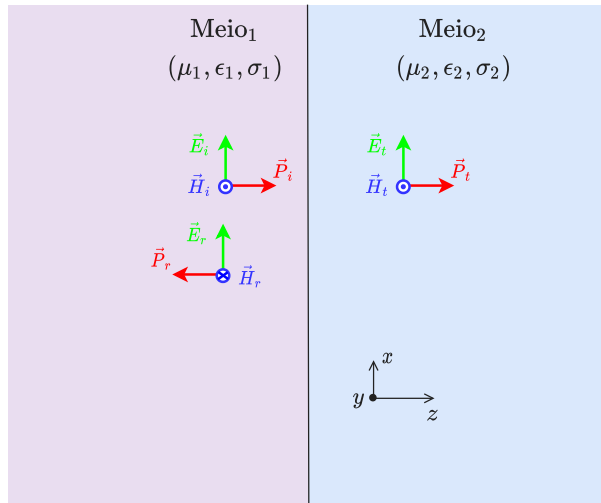


Sumário da Apresentação

1. Introdução e Fenomenologia de Interfaces
2. Incidência Normal: Interface Dielétrica (2 Meios)
3. Incidência Normal: Meios Condutores e PEC
4. Meios Estratificados: O Problema da Camada Fina
5. Casadores de Impedância ($\lambda/4$ e $\lambda/2$)
6. Incidência Oblíqua e Leis de Snell
7. Equações de Fresnel (Polarizações TE e TM)
8. Ângulo de Brewster, Reflexão Total e Fibras Ópticas
9. Estudo Avançado: Lâminas Finas e Estruturas Periódicas

Fenomenologia da Descontinuidade Material

Por que ocorrem reflexão e refração?



Interface planar entre dois meios materiais
com descontinuidade de impedância.

- ▶ Quando uma onda encontra uma fronteira entre meios com parâmetros $(\epsilon_1, \mu_1) \neq (\epsilon_2, \mu_2)$, as impedâncias intrínsecas diferem ($\eta_1 \neq \eta_2$).
- ▶ As **condições de contorno de Maxwell** não podem ser satisfeitas apenas pela onda incidente.
- ▶ Surge necessariamente uma **onda refletida** no Meio 1 e uma **onda transmitida** no Meio 2.

Condições de Contorno de Maxwell na Interface

Na interface de separação $z = 0$ entre dois dielétricos ideais (sem cargas superficiais livres $\rho_s = 0$ e sem correntes superficiais livres $\vec{J}_s = 0$):

Componentes Tangenciais

$$\vec{E}_{1\text{tan}} = \vec{E}_{2\text{tan}}$$

$$\vec{H}_{1\text{tan}} = \vec{H}_{2\text{tan}}$$

Continuidade rigorosa dos campos tangenciais.

Componentes Normais

$$D_{1n} = D_{2n} \implies \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

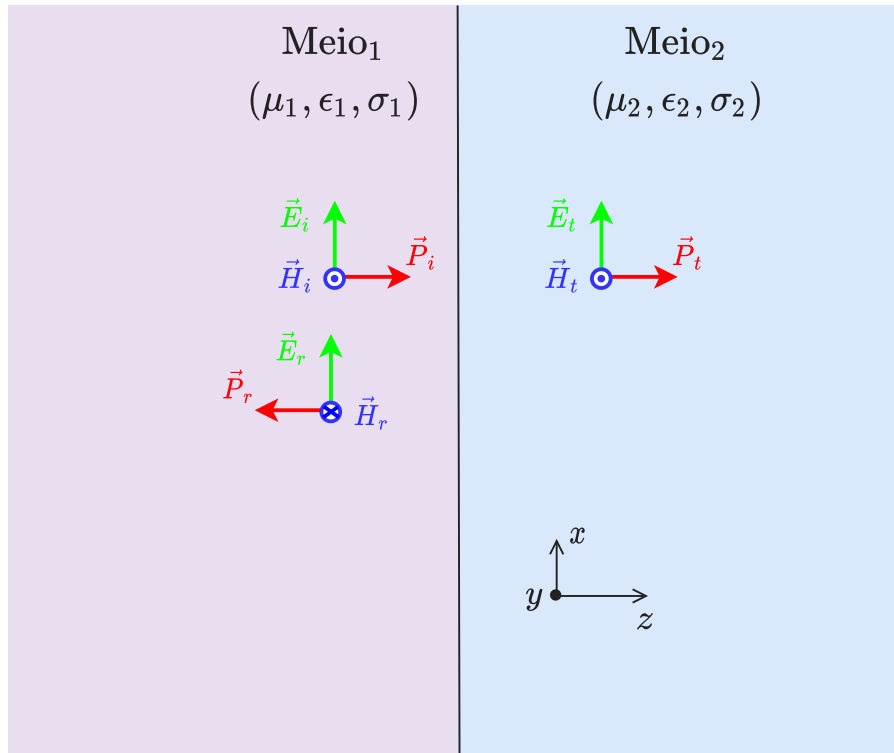
$$B_{1n} = B_{2n} \implies \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Continuidade do fluxo normal.

Conservação de Energia

O fluxo de potência incidente na fronteira deve ser igual à soma das potências refletida e transmitida: $\langle \vec{P}_i \rangle = \langle \vec{P}_r \rangle + \langle \vec{P}_t \rangle$.

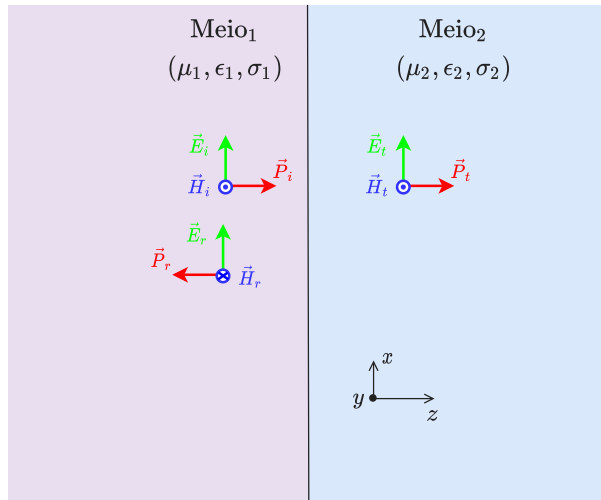
Reflexão e Refração: Incidência Normal



Ondas incidente $(\vec{E}_i, \vec{H}_i)$, refletida $(\vec{E}_r, \vec{H}_r)$ e transmitida $(\vec{E}_t, \vec{H}_t)$.

Solução da Equação de Onda na Fronteira

Solução da Equação de Onda (Fasorial):

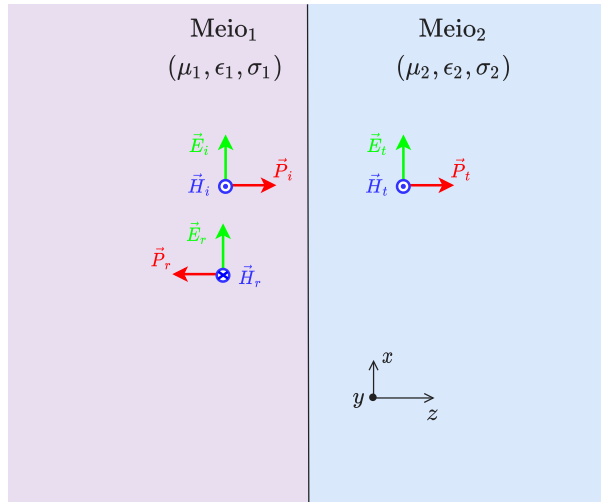


$$\dot{E}_x = C_1 e^{-\gamma z} + D_1 e^{\gamma z} \quad (1a)$$

$$\dot{H}_y = \frac{1}{\eta} [C_1 e^{-\gamma z} - D_1 e^{\gamma z}] \quad (1b)$$

- ▶ C_1 : amplitude da onda progressiva (sentido $+z$).
- ▶ D_1 : amplitude da onda regressiva (sentido $-z$).
- ▶ Meios sem perdas: $\gamma = j\beta$.

Campos Incidente, Transmitido e Refletido



Campo Incidente (Meio 1, $+z$):

$$\tilde{E}_i = C_1 e^{-\gamma_1 z} \hat{a}_x \quad (2a)$$

$$\tilde{H}_i = (C_1/\eta_1) e^{-\gamma_1 z} \hat{a}_y \quad (2b)$$

Campo Transmitido (Meio 2, $+z$):

$$\tilde{E}_t = C_2 e^{-\gamma_2 z} \hat{a}_x \quad (3a)$$

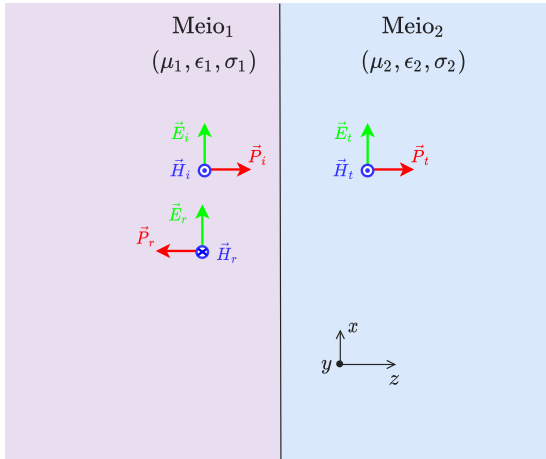
$$\tilde{H}_t = (C_2/\eta_2) e^{-\gamma_2 z} \hat{a}_y \quad (3b)$$

Campo Refletido (Meio 1, $-z$):

$$\tilde{E}_r = D_1 e^{+\gamma_1 z} \hat{a}_x \quad (4a)$$

$$\tilde{H}_r = -(D_1/\eta_1) e^{+\gamma_1 z} \hat{a}_y \quad (4b)$$

Continuidade dos Campos na Interface ($z = 0$)



Condições de contorno em $z = 0$:

$$\vec{E}_{1\text{tan}} = \vec{E}_{2\text{tan}} \implies \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t$$

$$\vec{H}_{1\text{tan}} = \vec{H}_{2\text{tan}} \implies \vec{H}_i + \vec{H}_r = \vec{H}_t$$

Substituindo os fasores em $z = 0$:

$$C_1 + D_1 = C_2 \quad (5a)$$

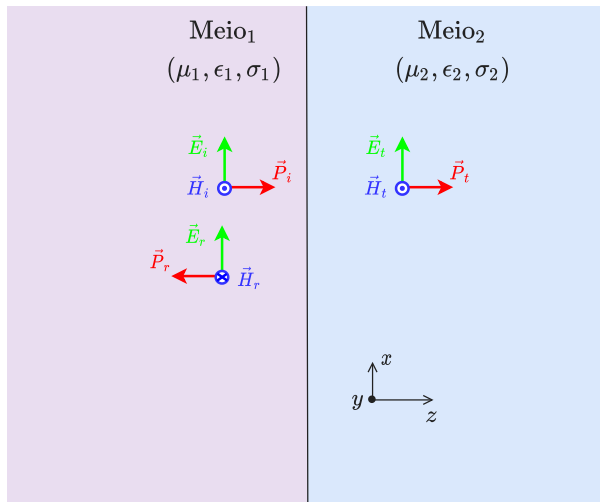
$$\frac{1}{\eta_1}(C_1 - D_1) = \frac{1}{\eta_2}C_2 \quad (5b)$$

Coeficientes de Reflexão (Γ) e Transmissão (T)

Definição dos coeficientes:

$$\Gamma = \frac{D_1}{C_1} = \frac{\tilde{E}_r(0)}{\tilde{E}_i(0)} \quad (6a)$$

$$T = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\tilde{E}_t(0)}{\tilde{E}_i(0)} \quad (6b)$$



Após manipulações algébricas simples:

Fórmulas Canônicas de Fresnel

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$T = 1 + \Gamma = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

Vetor de Poynting e Conservação de Potência

O fluxo de potência média transportada é dado pelo vetor de Poynting complexo:

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\tilde{E} \times \tilde{H}^* \right]$$

Calculando a potência média de cada onda:

$$\langle \vec{P}_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{|C_1|^2}{\eta_1} \hat{a}_z \quad (7a)$$

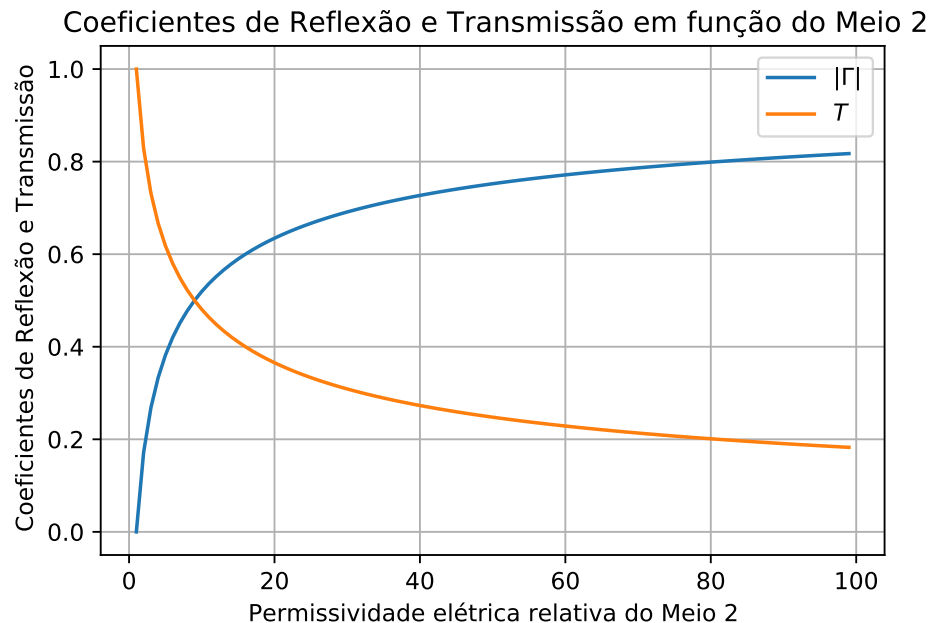
$$\langle \vec{P}_r \rangle = -\frac{1}{2} \frac{|D_1|^2}{\eta_1} \hat{a}_z = -|\Gamma|^2 \langle \vec{P}_i \rangle \quad (7b)$$

$$\langle \vec{P}_t \rangle = \frac{1}{2} \frac{|C_2|^2}{\eta_2} \hat{a}_z = |T|^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \langle \vec{P}_i \rangle \quad (7c)$$

Balço de Conservação de Energia

$$\frac{|\langle \vec{P}_r \rangle|}{|\langle \vec{P}_i \rangle|} + \frac{|\langle \vec{P}_t \rangle|}{|\langle \vec{P}_i \rangle|} = 1 \implies |\Gamma|^2 + |T|^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} = 1$$

Curvas dos Coeficientes de Reflexão e Transmissão



Variação de Γ e T em função da razão de impedâncias η_2/η_1 entre dois dielétricos.

Incidência Normal: Meio 2 Condutor ($\sigma_2 > 0$)

Se o Meio 2 for condutor ($\sigma_2 \neq 0$), a impedância intrínseca é complexa:

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2}} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{\sigma_2}} e^{j\pi/4} \quad (\text{para } \sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2)$$

O Caso do Condutor Elétrico Perfeito (PEC: $\sigma_2 \rightarrow \infty$)

$$\eta_2 \rightarrow 0 \implies \Gamma = \frac{0 - \eta_1}{0 + \eta_1} = -1 \quad \text{e} \quad T = 0$$

Os campos totais no Meio 1 ($z \leq 0$) resultam da superposição com inversão de fase:

$$\tilde{E}_1(z) = C_1 (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) \hat{a}_x = -j2C_1 \sin(\beta_1 z) \hat{a}_x \quad (8a)$$

$$\tilde{H}_1(z) = \frac{C_1}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) \hat{a}_y = \frac{2C_1}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \hat{a}_y \quad (8b)$$

Formação de Onda Estacionária Pura

Potência Média Transportada:

$$\begin{aligned}\langle \vec{P} \rangle &= \frac{1}{2} \Re \left[\tilde{E}_1 \times \tilde{H}_1^* \right] \\ &= \frac{1}{2} \Re \left[-j2C_1 \sin(\beta_1 z) \hat{a}_x \times \frac{2C_1^*}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \hat{a}_y \right] = 0\end{aligned}$$

Campos no Domínio do Tempo (com $C_1 = |C_1|$ real):

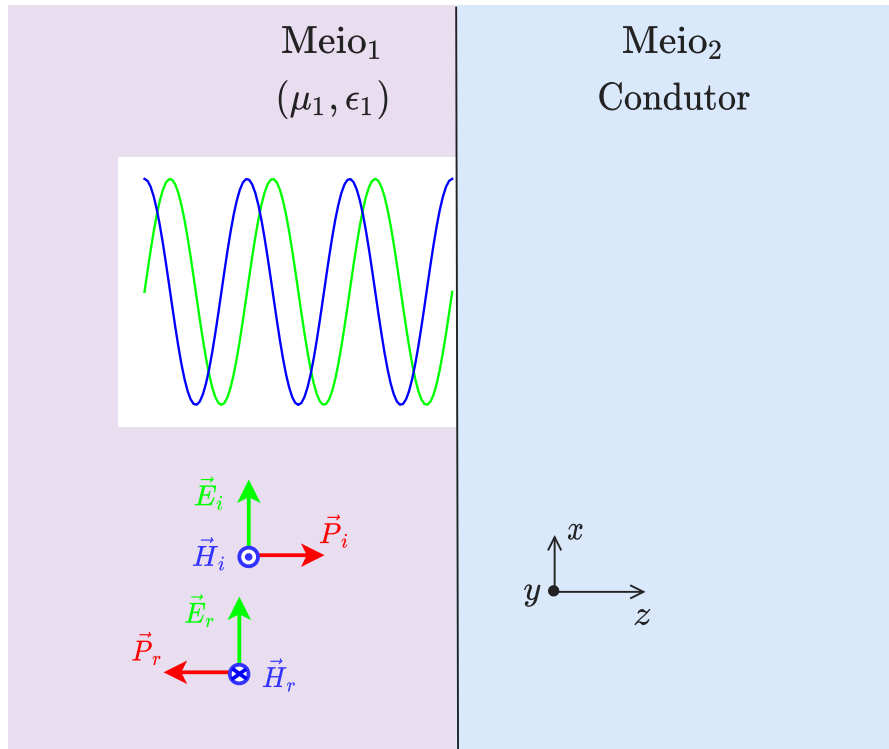
$$\vec{E}_1(z, t) = \Re \left[\tilde{E}_1 e^{j\omega t} \right] = 2|C_1| \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t) \hat{a}_x \quad (9a)$$

$$\vec{H}_1(z, t) = \Re \left[\tilde{H}_1 e^{j\omega t} \right] = \frac{2|C_1|}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t) \hat{a}_y \quad (9b)$$

Características Físicas

- ▶ Não há propagação líquida de energia; a energia oscila entre $\vec{E}$ e $\vec{H}$.
- ▶ Nós de campo elétrico em $z = -m \frac{\lambda_1}{2}$ (incluindo $z = 0$ na superfície metálica).

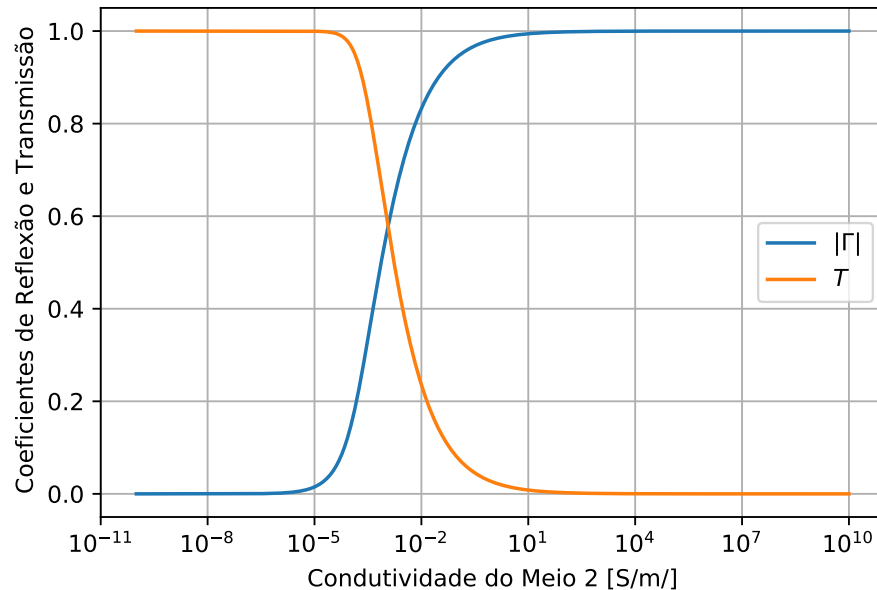
Reflexão em Condutor Perfeito



Perfil espacial da onda estacionária formada no Meio 1 diante da fronteira com condutor perfeito.

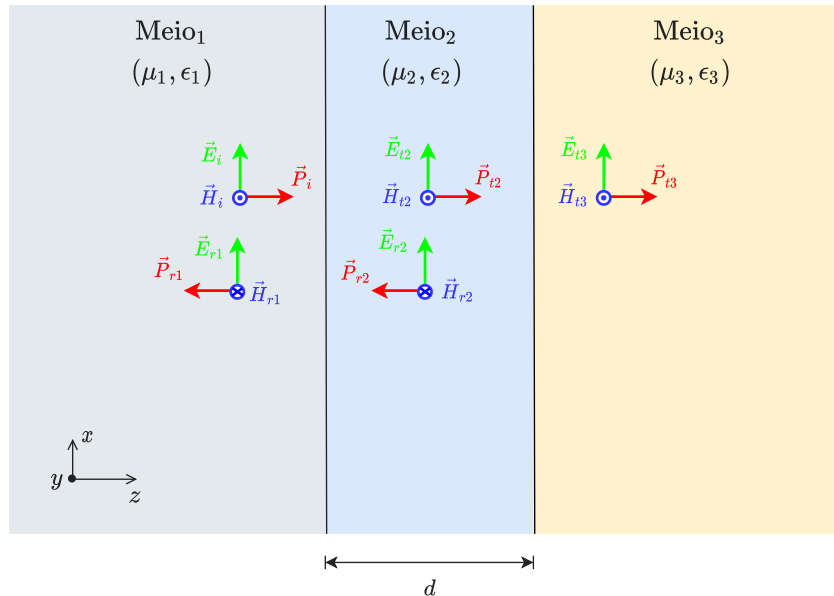
Coeficientes com Meio 2 Condutor

eficientes de Reflexão e Transmissão em função da condutividade do M



Variação de módulo e fase dos coeficientes para interfaces com perdas ôhmicas.

Reflexão e Refração: O Problema da Camada Fina



Objetivo Fundamental

Determinar a potência refletida para o Meio 1 em função da espessura d da camada intermediária e dos parâmetros dos três meios materiais.

Campos no Interior dos Três Meios

Posicionando a origem $z = 0$ na interface entre os Meios 2 e 3:

Meio 1 ($z \leq -d$):

$$\tilde{E}_1 = C_1 e^{-j\beta_1 z} + D_1 e^{j\beta_1 z} \quad (10a)$$

$$\tilde{H}_1 = \frac{C_1}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} - \frac{D_1}{\eta_1} e^{j\beta_1 z} \quad (10b)$$

Meio 2 (Camada intermediária, $-d \leq z \leq 0$):

$$\tilde{E}_2 = C_2 e^{-j\beta_2 z} + D_2 e^{j\beta_2 z} \quad (11a)$$

$$\tilde{H}_2 = \frac{C_2}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} - \frac{D_2}{\eta_2} e^{j\beta_2 z} \quad (11b)$$

Meio 3 ($z \geq 0$, semi-infinito):

$$\tilde{E}_3 = C_3 e^{-j\beta_3 z} \quad (12a)$$

$$\tilde{H}_3 = \frac{C_3}{\eta_3} e^{-j\beta_3 z} \quad (12b)$$

Condições de Contorno nas Interfaces ($z = -d$ e $z = 0$)

Campo Elétrico Tangencial:

$$\vec{E}_{1\text{tan}}|_{z=-d} = \vec{E}_{2\text{tan}}|_{z=-d}$$

$$\vec{E}_{2\text{tan}}|_{z=0} = \vec{E}_{3\text{tan}}|_{z=0}$$

Campo Magnético Tangencial:

$$\vec{H}_{1\text{tan}}|_{z=-d} = \vec{H}_{2\text{tan}}|_{z=-d}$$

$$\vec{H}_{2\text{tan}}|_{z=0} = \vec{H}_{3\text{tan}}|_{z=0}$$

Sistema Linear de Equações:

$$C_1 e^{j\beta_1 d} + D_1 e^{-j\beta_1 d} = C_2 e^{j\beta_2 d} + D_2 e^{-j\beta_2 d} \quad (13a)$$

$$\frac{C_1}{\eta_1} e^{j\beta_1 d} - \frac{D_1}{\eta_1} e^{-j\beta_1 d} = \frac{C_2}{\eta_2} e^{j\beta_2 d} - \frac{D_2}{\eta_2} e^{-j\beta_2 d} \quad (13b)$$

$$C_2 + D_2 = C_3 \quad (13c)$$

$$\frac{C_2}{\eta_2} - \frac{D_2}{\eta_2} = \frac{C_3}{\eta_3} \quad (13d)$$

Coefficiente de Reflexão Global da Camada Fina

Definindo os coeficientes de reflexão e transmissão locais:

$$\Gamma_{12} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (14a)$$

$$\Gamma_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \quad (14b)$$

$$T_{12} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (15a)$$

$$T_{23} = \frac{2\eta_3}{\eta_3 + \eta_2} \quad (15b)$$

Equações de Interferência de Múltiplas Camadas

$$\Gamma = \left[\frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23}e^{-j2\beta_2d}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23}e^{-j2\beta_2d}} \right] e^{+j2\beta_1d}$$

$$T = \frac{T_{12}T_{23}e^{-j\beta_2d}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23}e^{-j2\beta_2d}} e^{+j\beta_1d}$$

O Transformador de Quarto de Onda ($\lambda/4$)

Se a espessura da camada intermediária for $d = \lambda_2/4$:

$$2\beta_2 d = 2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\lambda_2}{4} \right) = \pi \implies e^{-j2\beta_2 d} = e^{-j\pi} = -1$$

Substituindo na equação de Γ :

$$\Gamma = \left[\frac{\Gamma_{12} - \Gamma_{23}}{1 - \Gamma_{12}\Gamma_{23}} \right] e^{+j2\beta_1 d}$$

Condição de Reflexão Rigorosamente Nula ($\Gamma = 0$)

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{23} \implies \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \implies \eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$$

Aplicações Práticas

- ▶ **Revestimento Antirreflexo:** Lentes e células solares ($n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$).
- ▶ **Casador de RF:** Seção de linha $\lambda/4$ entre gerador e carga.

A Camada de Meia Onda ($\lambda/2$) e Transparência

Se a espessura física for múltipla de meia onda: $d = \lambda_2/2$:

$$2\beta_2 d = 2 \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \right) \left(\frac{\lambda_2}{2} \right) = 2\pi \implies e^{-j2\beta_2 d} = 1$$

Substituindo na fórmula global:

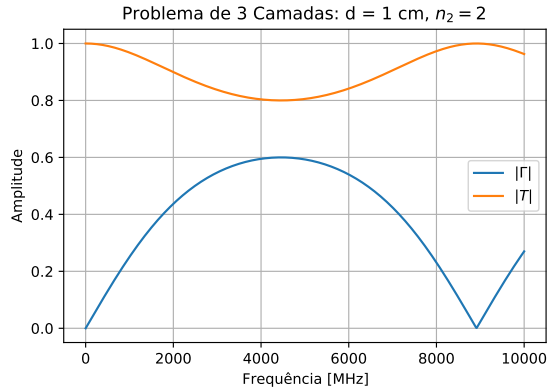
$$\Gamma = \left[\frac{\Gamma_{12} + \Gamma_{23}}{1 + \Gamma_{12}\Gamma_{23}} \right] e^{+j2\beta_1 d} = \Gamma_{13} e^{+j2\beta_1 d}$$

Propriedade de Transparência Eletromagnética

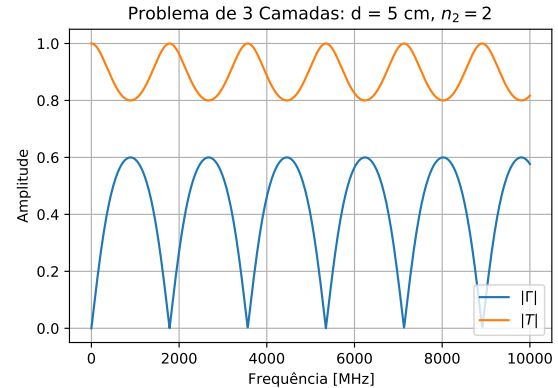
A reflexão observada no Meio 1 é rigorosamente idêntica à que ocorreria sem a camada intermediária (efeito de transparência).

Aplicação Clássica em Radares — Radomes: Uma cúpula dielétrica com espessura $d = \lambda_2/2$ protege a antena sem atenuar o sinal na frequência de operação.

Resposta em Frequência: Espessuras de 1 cm e 5 cm

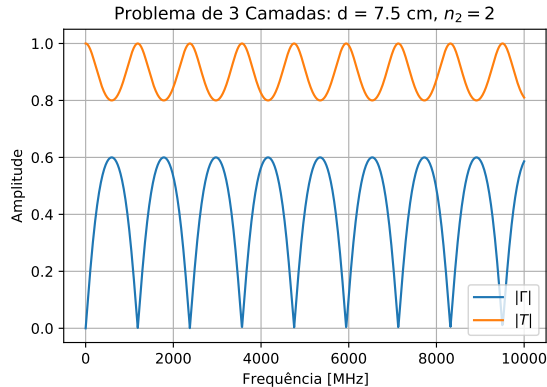


Espessura $d = 1$ cm.

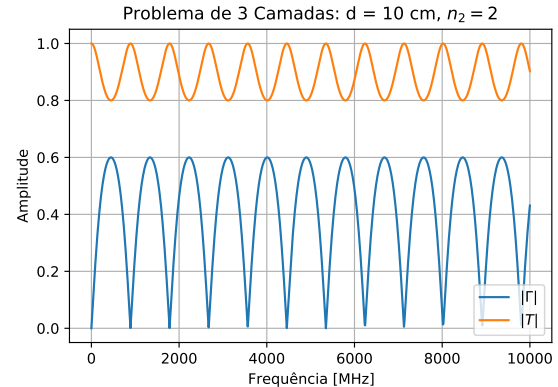


Espessura $d = 5$ cm.

Resposta em Frequência: Espessuras de 7,5 cm e 10 cm

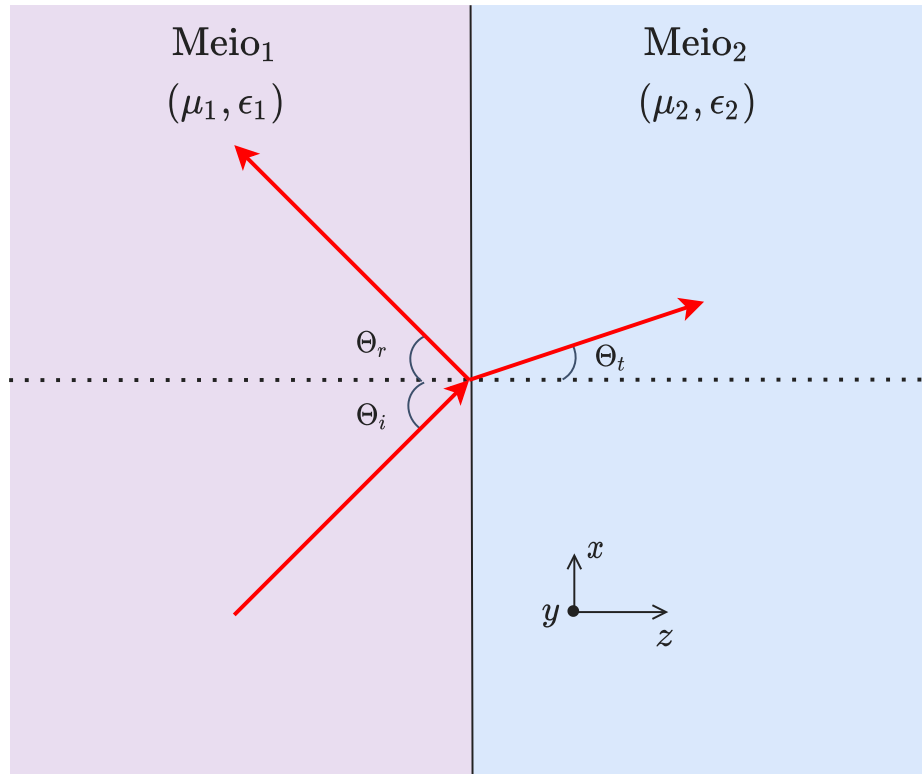


Espessura $d = 7,5 \text{ cm}$.



Espessura $d = 10 \text{ cm}$.

Reflexão e Refração: Incidência Oblíqua



Geometria de incidência oblíqua com ângulos incidente (θ_i), refletido (θ_r) e refratado (θ_t).

Continuidade de Fase e a Lei de Snell

Próximo à fronteira entre os dois meios, as velocidades de fase aparentes das ondas incidente, refletida e transmitida ao longo da interface devem ser rigorosamente iguais:

$$\frac{v_{p1}}{\sin \theta_i} = \frac{v_{p1}}{\sin \theta_r} = \frac{v_{p2}}{\sin \theta_t}$$

1ª Lei de Snell: Reflexão

Da primeira igualdade:

$$\sin \theta_r = \sin \theta_i \implies \theta_r = \theta_i$$

2ª Lei de Snell: Refração

Da segunda igualdade:

$$\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t$$

$$\mathbf{n}_1 \sin \theta_i = \mathbf{n}_2 \sin \theta_t$$

O Plano de Incidência e Decomposição Polar

Definição de Plano de Incidência

É o plano geométrico que contém o **vetor de propagação da onda incidente** ($\vec{k}_i$) e a **normal à interface** ($\hat{n} = \hat{a}_z$).

Qualquer onda com polarização arbitrária pode ser decomposta em duas polarizações ortogonais fundamentais:

Polarização Perpendicular (TE):

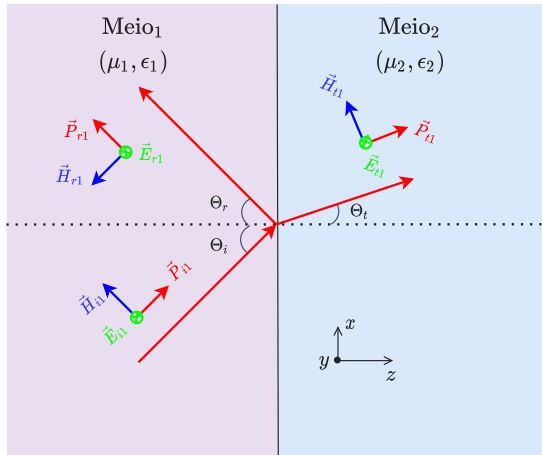
- ▶ Vetor $\vec{E}$ perpendicular ao plano de incidência;
- ▶ Também denominada onda modo s .

Polarização Paralela (TM):

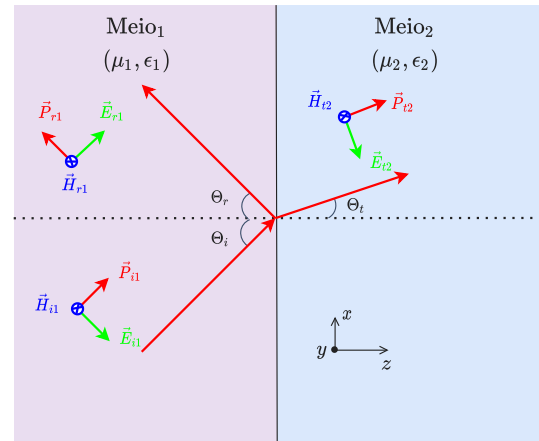
- ▶ Vetor $\vec{H}$ perpendicular ao plano de incidência;
- ▶ Vetor $\vec{E}$ contido no plano de incidência (modo p).

Polarizações TE e TM em Incidência Oblíqua

Polarização Perpendicular (TE)



Polarização Paralela (TM)

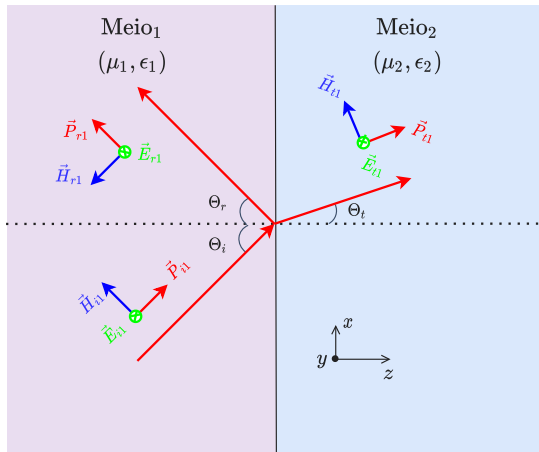


Equações de Fresnel: Polarização Perpendicular (TE)

Condições de contorno em $z = 0$:

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$$

$$\frac{E_{i0} - E_{r0}}{\eta_1} \cos \theta_i = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \cos \theta_t$$



Coeficientes TE (Fresnel)

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

$$T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

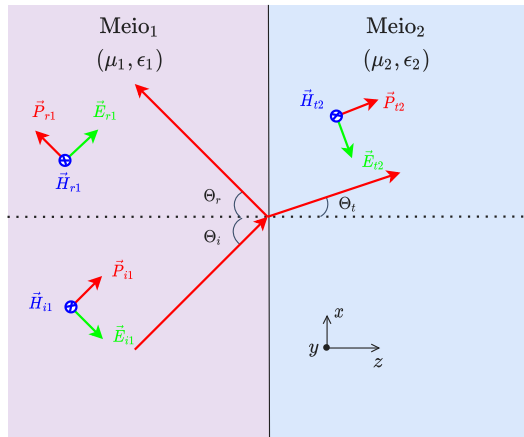
$$1 + \Gamma_{\perp} = T_{\perp}$$

Equações de Fresnel: Polarização Paralela (TM)

Condições de contorno em $z = 0$:

$$(E_{i0} + E_{r0}) \cos \theta_i = E_{t0} \cos \theta_t$$

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{1}{\eta_2}E_{t0}$$



Coeficientes TM (Fresnel)

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

$$T_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

$$1 + \Gamma_{\parallel} = T_{\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

Casos Singulares em Incidência Oblíqua

1. Incidência Normal ($\theta_i = 0$)

$$\Gamma_{\perp} = \Gamma_{\parallel} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

2. Reflexão Total Interna ($\theta_i \geq \theta_c$ para $n_1 > n_2$)

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad |\Gamma_{\perp}| = |\Gamma_{\parallel}| = 1$$

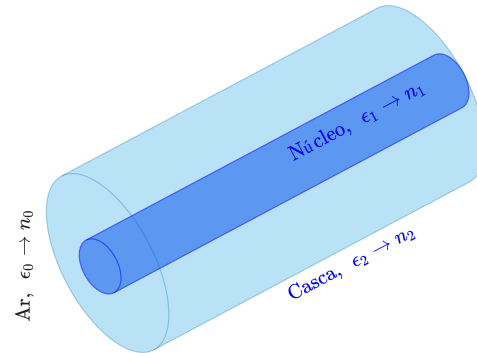
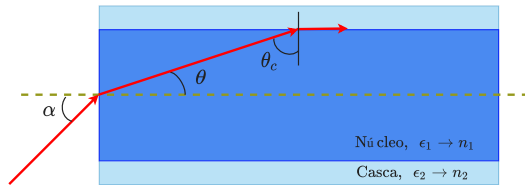
Surgimento de **ondas evanescentes** com decaimento exponencial $e^{-\alpha_z z}$.

3. Reflexão Nula $\rightarrow$ Ângulo de Brewster ($\Gamma_{\parallel} = 0$)

$$\tan \theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{com } \theta_i + \theta_t = 90^\circ)$$

$\Gamma_{\perp} \neq 0$ para qualquer ângulo em dielétricos com $\mu = \mu_0$.

Abertura Numérica em Fibras Ópticas: Geometria



Exercício 4 dos Slides Originais

Determine o valor máximo para α (abertura numérica da fibra) sabendo-se que $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \epsilon_0$.

Dedução da Abertura Numérica (NA)

Passo a Passo Analítico:

1. Face de entrada (Lei de Snell ar $\rightarrow$ núcleo):

$$n_0 \sin \alpha = n_1 \sin \theta_r \quad (\text{com } n_0 \approx 1)$$

2. Relação trigonométrica na interface núcleo-casca:

$$\theta_r = 90^\circ - \theta_i \implies \sin \theta_r = \cos \theta_i$$

3. Condição de reflexão interna total: Para raio guiado, $\theta_i \geq \theta_c$:

$$\cos \theta_i = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}$$

Fórmula Final da Abertura Numérica

$$\text{NA} \equiv \sin \alpha_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}}$$

Exercícios Propostos e Laboratório em Python

Exercício 1: Simulação Computacional em Python

Escreva um código em Python para calcular Γ e T tendo como dados de entrada (ε_i, μ_i) com $i = 1, 2, 3$ e a espessura da camada (d). Plotar a resposta espectral de refletância.

Exercício 2: Casador $\lambda/4$

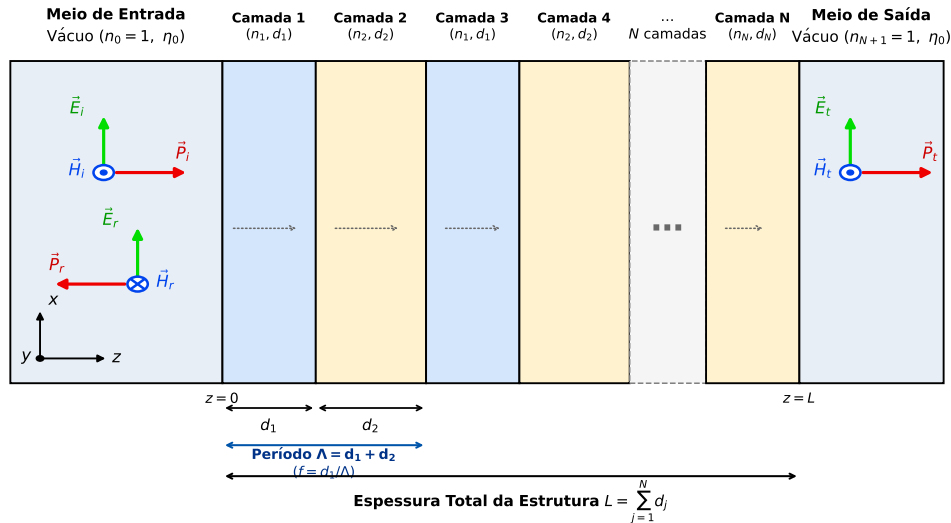
Em quais condições temos $\Gamma = 0$ em uma estrutura de três meios dielétricos?

Resposta: $\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$ com espessura $d = (2m + 1)\lambda_2/4$.

Exercício 3: Balanço Analítico de Fluxo de Potência

Demonstre analiticamente que em uma camada fina dielétrica sem perdas ($\sigma_2 = 0$) a potência transmitida satisfaz $|\Gamma|^2 + |T|^2 \frac{\eta_1}{\eta_3} = 1$.

Topologia de Lâminas Finas Multicamadas no Vácuo



- ▶ **Meio de Entrada e Saída:** Vácuo infinito homogêneo ($n_0 = n_{N+1} = 1$).
- ▶ **Estrutura Central** ($0 \leq z \leq L$): N camadas dielétricas planas de espessuras d_j e índices n_j .
- ▶ **Propagação:** Onda plana uniforme em incidência normal ($\theta_i = 0^\circ$) ao longo de z .

Método das Matrizes de Transferência (TMM 1D)

Para cada camada j , com defasagem óptica $\delta_j = k_0 n_j d_j = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_j d_j$:

$$\begin{bmatrix} E(z_{j-1}) \\ \eta_0 H(z_{j-1}) \end{bmatrix} = M_j \begin{bmatrix} E(z_j) \\ \eta_0 H(z_j) \end{bmatrix}, \quad M_j = \begin{bmatrix} \cos \delta_j & -\frac{j}{n_j} \sin \delta_j \\ -j n_j \sin \delta_j & \cos \delta_j \end{bmatrix}$$

Matriz Global do Sistema (N camadas)

$$\mathbf{M} = \prod_{j=1}^N M_j = M_1 \cdot M_2 \cdots M_N = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Com entrada e saída no vácuo ($n_0 = n_{N+1} = 1$), os coeficientes analíticos são:

$$r = \frac{(M_{11} + M_{12}) - (M_{21} + M_{22})}{(M_{11} + M_{12}) + (M_{21} + M_{22})}, \quad R(\lambda) = |r|^2, \quad T(\lambda) = 1 - R(\lambda)$$

Lâmina Única e Camada Anti-Refletora

Lâmina Única (Fabry-Perot)

Para $N = 1$, refletância de Airy:

$$R(\lambda) = \frac{(n_1^2 - 1)^2 \sin^2 \delta_1}{4n_1^2 + (n_1^2 - 1)^2 \sin^2 \delta_1}$$

- ▶ **Transparência Total**
($R = 0$):
 $d_1 = m \frac{\lambda_0}{2n_1} \quad (m = 1, 2, \dots)$
- ▶ **Reflexão Máxima:**
 $d_1 = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{4n_1}$

Revestimento Anti-Reflexivo ($\lambda_0/4$)

Espessura de quarto de onda:

$$d_1 = \frac{\lambda_0}{4n_1} \implies \delta_1 = \frac{\pi}{2}$$

- ▶ A matriz característica inverte a fase relativa em 180° .
- ▶ As reflexões nas faces sofrem interferência destrutiva, anulando $R(\lambda_0)$.

Estruturas Periódicas e Regimes de Halir

Para redes periódicas ($\Lambda = d_1 + d_2$, $f = d_1/\Lambda$), o índice efetivo de Rytov é $n_{\text{eff}} = \sqrt{fn_1^2 + (1-f)n_2^2}$. A física divide-se em 3 regimes (Halir et al., 2015):

1. Subwavelength (SWG)

$$\Lambda < \frac{\lambda_0}{2n_{\text{eff}}}$$

- ▶ Sem reflexão de Bragg nem difração.
- ▶ Atua como **metamaterial homogêneo**.

2. Bragg (Bandgap PBG)

$$\Lambda \approx \frac{\lambda_0}{2n_{\text{eff}}}$$

- ▶ Reflexão construtiva ($\lambda_0 \approx 2n_{\text{eff}}\Lambda$).
- ▶ **Bandgap Fotônico**: $R \rightarrow 100\%$ e decaimento evanescente.

3. Radiação / Difração

$$\Lambda > \frac{\lambda_0}{n_{\text{eff}}+1}$$

- ▶ Ordens radiativas ($m = -1$).
- ▶ Base de **acopladores de grade chip-fibra**.

Conclusão do Módulo 3

Síntese dos Conceitos Dominados:

- ▶ **Incidência Normal:** Coeficientes de Fresnel Γ e T , conservação de Poynting e onda estacionária pura em condutor perfeito.
- ▶ **Camadas Finas:** Múltiplas reflexões, casador de quarto de onda ($\lambda/4$) e transparência de $\lambda/2$.
- ▶ **Incidência Oblíqua:** Equações de Fresnel (TE e TM) e polarização total no Ângulo de Brewster ($\tan \theta_B = n_2/n_1$).
- ▶ **Reflexão Total Interna:** Ângulo crítico, ondas evanescentes e guiamento de luz em fibras ópticas ($\text{NA} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$).
- ▶ **Estudo Avançado:** Método Matricial TMM 1D, metamateriais SWG e os três regimes de Halir et al. (2015).

Próximo Módulo Curricular

Módulo 4: Teoria de Linhas de Transmissão e Carta de Smith — ondas guiadas em condutores, parâmetros distribuídos R, L, G, C e casamento de impedâncias.

Apêndice: Fundamentos do Método Matricial (TMM)

Princípio Físico e Operador de Camada

- ▶ A equação de onda escalar é resolvida analiticamente em cada camada homogênea.
- ▶ A continuidade de E e H tangenciais nas interfaces é mapeada por matrizes 2×2 :

$$\begin{bmatrix} E(z_{j-1}) \\ \eta_0 H(z_{j-1}) \end{bmatrix} = M_j \begin{bmatrix} E(z_j) \\ \eta_0 H(z_j) \end{bmatrix}, \quad M_j = \begin{bmatrix} \cos \delta_j & -\frac{j}{n_j} \sin \delta_j \\ -jn_j \sin \delta_j & \cos \delta_j \end{bmatrix}$$

Propriedades Analíticas

- ▶ $\det(\mathbf{M}) \equiv 1$ garante estabilidade estrita e conservação de Poynting.
- ▶ Livre de erros de discretização ou malha espacial.

Eficiência Computacional

- ▶ Resposta global:
 $\mathbf{M} = \prod_{j=1}^N M_j$.
- ▶ Varreduras espectrais em sub-milissegundos (motor da simulação web).

Apêndice: Referências Bibliográficas Recomendadas

Referências fundamentais para o método matricial e redes ópticas 1D:

1. **M. Born & E. Wolf** (1999). *Principles of Optics*, 7th ed., Cambridge Univ. Press. ISBN: 978-0-521-64222-4. [Cap. 1.6: Teoria clássica de filmes e matrizes 2×2].
2. **P. Yeh** (2005). *Optical Waves in Layered Media*, Wiley. ISBN: 978-0-471-73192-4. [Ondas em multicamadas, matrizes TMM e refletores DBR].
3. **R. Halir et al.** (2015). *Laser & Photonics Reviews* 9(1), 25–49. DOI: 10.1002/lpor.201400029. [Três regimes operacionais: SWG, Bragg e Radiação].
4. **S. M. Rytov** (1956). *Soviet Physics JETP* 2(3), 466–475. [Teoria analítica do meio efetivo EMT em multicamadas].

Rigor Bibliográfico

Obras consagradas e fundamentais para aprofundamento teórico e implementação computacional do método matricial.