

# [MOD-LT] Linhas de Transmissão e Estruturas Planares

Equações dos Telegrafistas, Microfita  
(*Microstrip*) e Carta de Smith

**Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto**

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-FOTON



# Sumário da Apresentação

---

1. Introdução e Limite dos Circuitos Concentrados
2. Modelo Distribuído e Equações dos Telegrafistas
3. Linhas Sem Perdas e Propagação de Ondas
4. Reflexão, Descasamento e Impedância de Entrada
5. Linhas Impressas e Teoria da Microfita (*Microstrip*)
6. Fundamentos Matemáticos da Carta de Smith
7. Rigor Bibliográfico e Referências Recomendadas

# James Clerk Maxwell e o Pensamento Investigativo

---



J. C. Maxwell (1831–1879).

*“O estudante que usa equipamentos caseiros, que sempre dão errado, muitas vezes aprende mais do que quem usa instrumentos cuidadosamente ajustados, nos quais ele pode confiar e que não ousa desmontar.”*

- ▶ Nos Módulos 1 a 3, estudamos as ondas eletromagnéticas livres e em interfaces;
- ▶ Para transportar sinais e potência de forma confinada e eficiente, recorreremos a **estruturas condutoras guiadas**: as **linhas de transmissão**.

# O Critério do Comprimento Elétrico e o Tempo de Trânsito

## Parâmetros Concentrados ( $\ell \ll \lambda$ )

- ▶ Tempo de trânsito  $t_d$  desprezível frente a  $t_r$ ;
- ▶ Leis de Kirchhoff (LKT e LKC) pontuais e instantâneas;
- ▶ Tensão e corrente uniformes ao longo de toda a trilha.

## Colapso e Parâmetros Distribuídos

- ▶ Condição crítica de propagação:

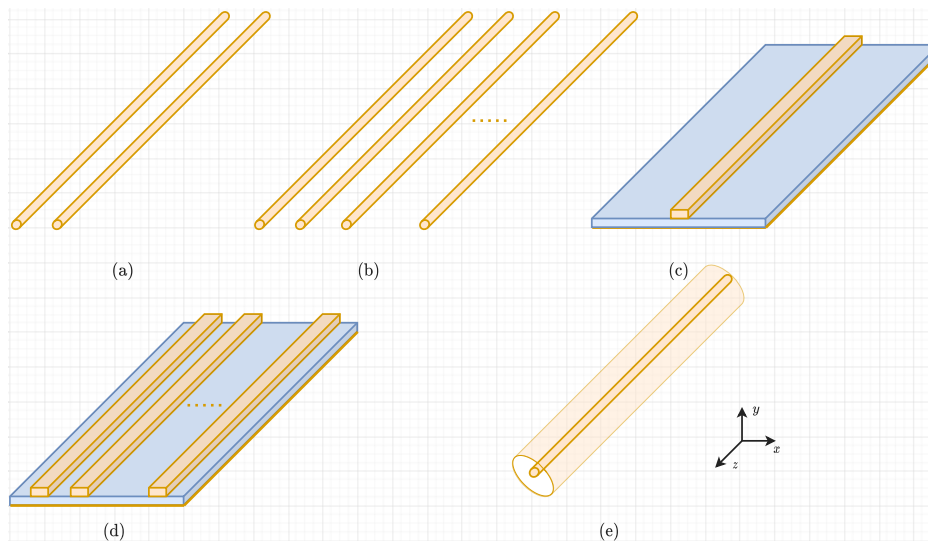
$$\ell \gtrsim 0,01\lambda \iff t_d = \frac{\ell}{v_p} \gtrsim 0,1 t_r$$

- ▶ Ondas espaço-temporais  $v(z, t)$  e  $i(z, t)$ ;
- ▶ Surgem reflexões, defasagens e ressonâncias.

## Significado Físico das Variáveis

- $\ell$  ( $l$ ): Comprimento da linha [m]
- $\lambda$ : Comprimento de onda ( $v_p/f$ ) [m]
- $v_p$ : Velocidade de fase ( $c/\sqrt{\epsilon_r}$ ) [m/s]
- $t_d$ : Atraso / trânsito ( $\ell/v_p$ ) [s]
- $t_r$ : Tempo de subida (10%–90%) [s]
- **Critério:**  $t_d \geq 0,1 t_r \implies$  reflexão perturba a borda

# Tipos Comuns de Linhas de Transmissão (2 Condutores)



## Linha Bifilar

Baixo custo, alta impedância ( $300\ \Omega$ ), uso em linhas aéreas e dipolos.

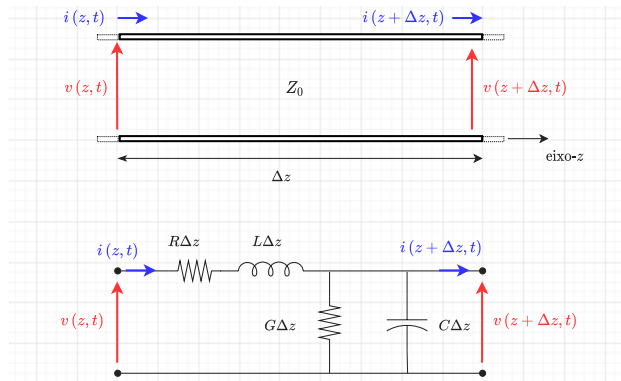
## Cabo Coaxial

Blindagem total, modo TEM puro,  $50\ \Omega$  e  $75\ \Omega$  em RF e vídeo.

## Linha de Fita / Microfita

Geometria planar para PCBs e MMICs, modo quase-TEM, fácil integração.

# Célula Circuital Infinitesimal ( $\Delta z$ )



Uma seção infinitesimal de comprimento  $\Delta z$  é modelada por 4 parâmetros primários por unidade de comprimento:

- ▶  $R$  [ $\Omega/\text{m}$ ]: Resistência série dos condutores (perdas ôhmicas por efeito pelicular);
- ▶  $L$  [ $\text{H}/\text{m}$ ]: Indutância série dos condutores (energia magnética armazenada);
- ▶  $G$  [ $\text{S}/\text{m}$ ]: Condutância paralelo do dielétrico (corrente de fuga e perdas dielétricas);
- ▶  $C$  [ $\text{F}/\text{m}$ ]: Capacitância paralelo entre condutores (energia eletrostática).

# Dedução das Equações dos Telegrafistas no Domínio do Tempo

Aplicando as leis de Kirchhoff na célula elementar  $\Delta z$ :

## Malha de Tensão (LKT)

$$v(z, t) - R\Delta z i(z, t) - L\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} - v(z + \Delta z, t) = 0$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{v(z + \Delta z, t) - v(z, t)}{\Delta z} \implies \boxed{\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = -R i(z, t) - L \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}}$$

## Nó de Corrente (LKC)

$$i(z, t) - G\Delta z v(z + \Delta z, t) - C\Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{i(z + \Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} \implies \boxed{\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = -G v(z, t) - C \frac{\partial v(z, t)}{\partial t}}$$

# Formulação Fasorial ( $e^{j\omega t}$ )

Adotando fasores escalares ( $\dot{V}(z)$  e  $\dot{I}(z)$ ):

## Equações dos Telegrafistas

$$\frac{d\dot{V}(z)}{dz} = -Z' \dot{I}(z)$$

$$\frac{d\dot{I}(z)}{dz} = -Y' \dot{V}(z)$$

onde:

$$Z' = R + j\omega L \quad [\Omega/\text{m}]$$

$$Y' = G + j\omega C \quad [\text{S}/\text{m}]$$

## Equações de Onda Fasoriais

$$\frac{d^2\dot{V}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \dot{V}(z) = 0$$

$$\frac{d^2\dot{I}(z)}{dz^2} - \gamma^2 \dot{I}(z) = 0$$

com a constante de propagação:

$$\gamma = \sqrt{Z'Y'} = \alpha + j\beta$$

$$\alpha \geq 0 \text{ [Np/m]}, \quad \beta \geq 0 \text{ [rad/m]}$$



# Constante de Propagação e Impedância Característica

A solução geral desacoplada expressa a superposição de ondas progressivas e regressivas:

## Solução Geral no Espaço Fasorial

$$\dot{V}(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}, \quad \dot{I}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$$

## Impedância Característica ( $Z_0$ )

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega]$$

Razão entre a onda de tensão progressiva e a correspondente corrente progressiva.

## Constante de Propagação ( $\gamma$ )

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

- ▶  $\alpha$ : atenuação (1 Np = 8,686 dB);
- ▶  $\beta$ : fase ( $\lambda = 2\pi/\beta$ ).

# A Linha de Transmissão Sem Perdas ( $R = 0, G = 0$ )

Em altas frequências,  $R \ll \omega L$  e  $G \ll \omega C$ . No limite sem perdas:

## Parâmetros Sem Perdas

- ▶  $\alpha = 0$  (propagação sem atenuação);
- ▶  $\beta = \omega\sqrt{LC}$ ;
- ▶  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \in \mathbb{R}^+$  (resistivo);
- ▶ Velocidade de fase e comprimento:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$$

## Condição de Heaviside ( $RC = LG$ )

Descoberta por **Oliver Heaviside** (1887):

- ▶  $\gamma = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}$ ;
- ▶  $\alpha = \sqrt{RG} = \text{constante}$ ;
- ▶  $v_p = 1/\sqrt{LC} = \text{constante}$ ;
- ▶ **Dispersão nula:** sinais propagam-se sem distorção morfológica!

# Coeficiente de Reflexão na Carga ( $\Gamma_L$ )

Na terminação da linha ( $z = 0$ , na carga):

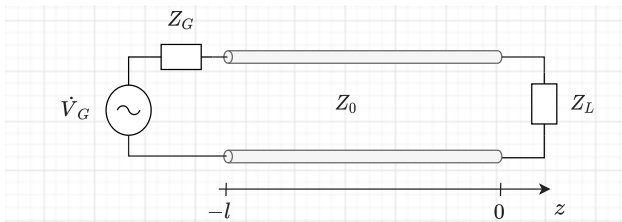
$$\dot{V}_L = V_0^+ + V_0^-, \quad \dot{I}_L = \frac{V_0^+ - V_0^-}{Z_0}$$

Como  $\dot{V}_L = Z_L \dot{I}_L$ :

## Coeficiente de Reflexão ( $\Gamma_L$ )

$$\Gamma_L = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_L| e^{j\theta_L}$$

- ▶ Linha Casada ( $Z_L = Z_0$ ):  
 $\Gamma_L = 0$ ;
- ▶ Curto-Circuito ( $Z_L = 0$ ):  
 $\Gamma_L = -1$ ;
- ▶ Circuito Aberto ( $Z_L \rightarrow \infty$ ):  
 $\Gamma_L = +1$ .



Linha terminada em carga arbitrária  $Z_L$ .

# Onda Estacionária, TOE (VSWR) e Perda de Retorno

A interferência mútua gera o padrão de onda estacionária:

## Taxa de Onda Estacionária (TOE)

$$\text{TOE} = \frac{|\dot{V}|_{\max}}{|\dot{V}|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

- ▶ Sigla em inglês: **VSWR**;
- ▶ Faixa:  $1 \leq \text{TOE} < \infty$ ;
- ▶ Linha casada:  $\text{TOE} = 1$  (ideal);
- ▶ Descasamento total:  
 $\text{TOE} \rightarrow \infty$ .

## Perda de Retorno ( $RL_{\text{dB}}$ )

$$RL = -20 \log_{10} |\Gamma_L| \quad [\text{dB}]$$

- ▶ Casamento ideal:  $RL \rightarrow \infty$  dB;
- ▶ Reflexão total:  $RL = 0$  dB;
- ▶ Padrão industrial de RF:

$$RL \geq 14 \text{ dB} \iff \text{TOE} \leq 1,5$$

# Equação de Transformação de Impedância de Entrada

## $Z_{\text{in}}(\ell)$

---

A impedância observada olhando-se para a linha a uma distância  $\ell$  da carga é:

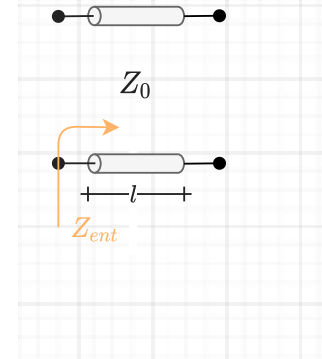
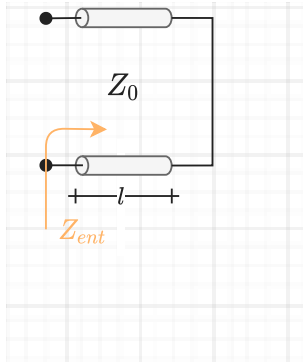
### Fórmula de Entrada (Linha Sem Perdas)

$$Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}$$

- ▶ Periódica com período espacial de **meia onda** ( $\ell = \lambda/2$ );
- ▶ Para linhas com perdas ( $\gamma = \alpha + j\beta$ ):

$$Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma\ell)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma\ell)}$$

# Terminações Notáveis: Curto-Circuito e Circuito Aberto



## Curto-Circuito ( $Z_L = 0$ )

$$Z_{in}^{cc}(\ell) = jZ_0 \tan(\beta\ell)$$

- ▶  $0 < \ell < \lambda/4$ : indutivo ( $X > 0$ );
- ▶  $\ell = \lambda/4$ : aberto ( $Z_{in} \rightarrow \infty$ );
- ▶  $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$ : capacitivo ( $X < 0$ );
- ▶  $\ell = \lambda/2$ : repete curto ( $Z_{in} = 0$ ).

## Circuito Aberto ( $Z_L \rightarrow \infty$ )

$$Z_{in}^{ca}(\ell) = -jZ_0 \cot(\beta\ell)$$

- ▶  $0 < \ell < \lambda/4$ : capacitivo ( $X < 0$ );
- ▶  $\ell = \lambda/4$ : curto ( $Z_{in} = 0$ );
- ▶  $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$ : indutivo ( $X > 0$ );
- ▶  $\ell = \lambda/2$ : repete aberto.

## O Transformador de Quarto de Onda ( $\ell = \lambda/4$ )

Para um comprimento elétrico  $\ell = \lambda/4$  ( $\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$ ),  
 $\tan(\beta\ell) \rightarrow \infty$ :

### Equação do Transformador $\lambda/4$

$$\lim_{\beta\ell \rightarrow \pi/2} Z_{\text{in}}(\ell) = \boxed{\frac{Z_0^2}{Z_L}}$$

### Aplicações em Casamento de RF:

- ▶ Para casar uma linha  $Z_1$  com uma carga real  $R_L$ :

$$Z_0 = \sqrt{Z_1 R_L}$$

- ▶ Inversor de impedância: carga resistiva baixa vira alta e vice-versa.

### Repetidor de Meia Onda ( $\ell = \lambda/2$ )

Para  $\ell = \lambda/2 \implies \beta\ell = \pi$ :

$$\tan(\pi) = 0 \implies \boxed{Z_{\text{in}}(\lambda/2) = Z_L}$$

A carga é replicada na entrada independente do valor de  $Z_0$ !

# Determinação das Ondas: Método Matricial $2 \times 2$

A determinação de  $V_0^+$  e  $V_0^-$  em uma linha com carga em  $z = 0$  e gerador em  $z = -d$  resolve-se por um sistema linear algébrico direto:

## Condições nos Terminais:

1. Na carga ( $z = 0$ ):

$$\Gamma_L = \frac{V_0^-}{V_0^+} \implies \Gamma_L V_0^+ - V_0^- = 0$$

2. Na entrada ( $z = -d$ ):

$$V_0^+ e^{j\beta d} + V_0^- e^{-j\beta d} = \dot{V}(-d)$$

## Sistema Linear Matricial $2 \times 2$

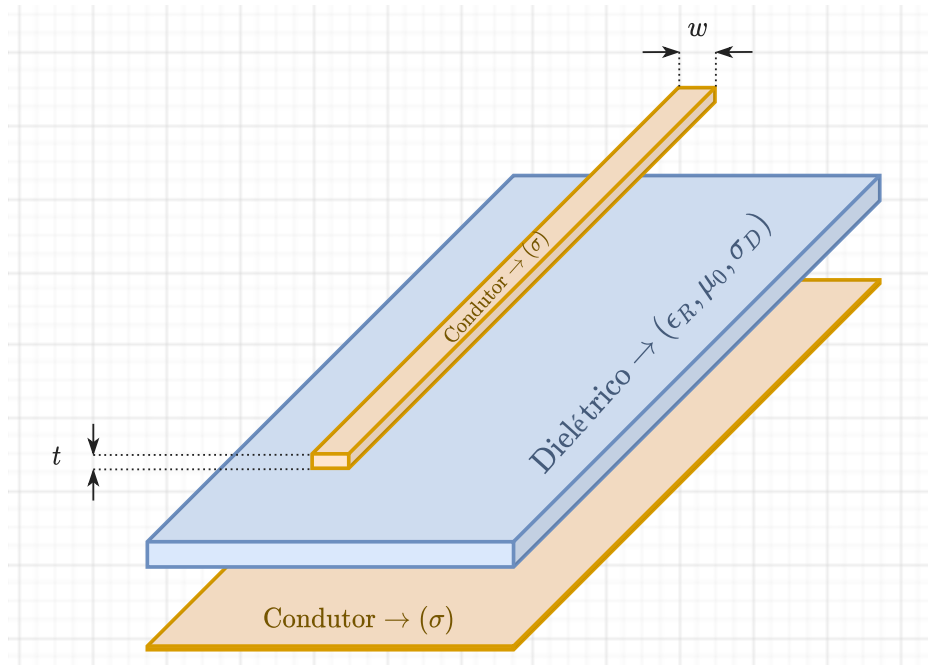
$$\begin{bmatrix} \Gamma_L & -1 \\ e^{j\beta d} & e^{-j\beta d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^+ \\ V_0^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{V}(-d) \end{bmatrix}$$

## Vantagem Pedagógica e Numérica:

- ▶ Conexão direta com Álgebra Linear;
- ▶ Solução analítica por determinante ou via `numpy.linalg.solve`.



# A Linha de Microfita (*Microstrip*): Topologia Planar

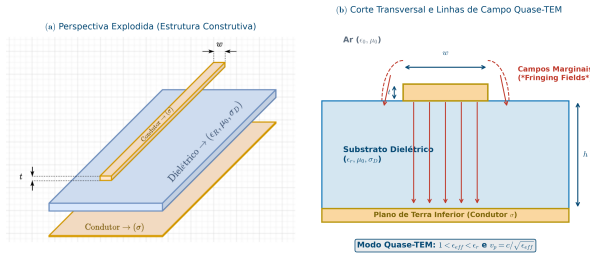


- ▶ **Trilha Superior:** Condutor metálico de largura  $W$  e espessura fina  $t$ ;
- ▶ **Substrato Dielétrico:** Espessura uniforme  $h$  e permissividade relativa  $\epsilon_r$  (ex: FR-4, Rogers, Alumina);
- ▶ **Plano de Terra Inferior:** Metalização contínua na base inferior.

# O Modo Quase-TEM e a Permissividade Efetiva ( $\epsilon_{\text{eff}}$ )

## Por que o modo é Quase-TEM?

- ▶ Dielétrico não envolve totalmente o condutor: ar ( $\epsilon_0$ ) acima e substrato ( $\epsilon_r$ ) abaixo;
- ▶ Velocidades de fase diferem na interface;
- ▶ Para  $h \ll \lambda$ , componentes longitudinais  $E_z, H_z$  são mínimas  $\Rightarrow$  **Quasi-TEM**.



Seção transversal com campos de borda.

## Permissividade Efetiva

$$1 < \epsilon_{\text{eff}} < \epsilon_r, \quad v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}}$$

# Equações Analíticas de Análise (Wheeler / Pozar)

Dado  $(w, h, \epsilon_r)$ , determinar  $\epsilon_{\text{eff}}$  e a impedância característica  $Z_0$ :

## Permissividade Efetiva ( $\epsilon_{\text{eff}}$ )

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12 \frac{h}{w}}}$$

## Impedância Característica $Z_0$ (Dois Ramos)

$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \ln \left( \frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right), & \text{para } \frac{w}{h} \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} \left[ \frac{w}{h} + 1,393 + 0,667 \ln \left( \frac{w}{h} + 1,444 \right) \right]}, & \text{para } \frac{w}{h} > 1 \end{cases}$$

# Equações Analíticas de Síntese (Projeto de Microfita)

Dado  $(Z_0, h, \epsilon_r)$ , calcular a razão de aspecto  $w/h$  e a largura física  $w$ :

## Ramo 1: Linhas Estreitas ( $w/h \leq 2$ )

$$\frac{w}{h} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2}$$

onde:

$$A = \frac{Z_0}{60} \sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left( 0,23 + \frac{0,11}{\epsilon_r} \right)$$

## Ramo 2: Linhas Largas ( $w/h > 2$ )

$$\frac{w}{h} = \frac{2}{\pi} \left[ B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r} \left\{ \ln(B - 1) + 0,39 - \frac{0,61}{\epsilon_r} \right\} \right]$$

onde:

$$B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{60\pi^2}{Z_0\sqrt{\epsilon_r}}$$

# Exemplo Numérico de Projeto: Linha de $50\ \Omega$ em FR-4

**Especificação:** Projetar linha de  $Z_0 = 50\ \Omega$  em substrato FR-4 com  $\epsilon_r = 4,4$  e  $h = 1,6$  mm.

## 1. Cálculo do Coeficiente A:

$$A = \frac{50}{60} \sqrt{\frac{5,4}{2}} + \frac{3,4}{5,4} \left( 0,23 + \frac{0,11}{4,4} \right) \approx 1,369 + 0,161 = \mathbf{1,530}$$

## 2. Avaliação pelo Ramo 1 ( $w/h \leq 2$ ):

$$\frac{w}{h} = \frac{8e^{1,530}}{e^{3,060} - 2} = \frac{8 \times 4,618}{21,328 - 2} \approx \mathbf{1,912} \quad (\leq 2 \implies \text{válido!})$$

## 3. Largura Física da Trilha ( $w$ ):

$$w = 1,912 \times h = 1,912 \times 1,6 \text{ mm} \approx \mathbf{3,06 \text{ mm}}$$

## 4. Permissividade Efetiva e Velocidade de Fase:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{5,4}{2} + \frac{3,4}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12(1,6/3,06)}} \approx \mathbf{3,33}$$

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{3,33}} \approx \mathbf{1,64 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

# Perdas e Limitações de Frequência em Microfita

A atenuação total da linha de microfita é a soma das perdas no dielétrico e no condutor:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c \quad [\text{Np/m}]$$

## Perdas no Dielétrico ( $\alpha_d$ )

$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_{\text{eff}} - 1) \tan \delta}{2 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} (\epsilon_r - 1)}$$

onde  $\tan \delta$  é a tangente de perdas (ex.:  $\tan \delta \approx 0,02$  no FR-4;  $\approx 0,002$  no Rogers).

## Perdas Ôhmicas / Condução ( $\alpha_c$ )

$$\alpha_c \approx \frac{R_s}{Z_0 W} = \frac{\sqrt{\pi f \mu / \sigma}}{Z_0 W}$$

onde  $R_s$  é a resistência superficial do cobre devida ao **efeito pelicular** (*skin effect*).

**Limite de Alta Frequência:** Para suprimir ondas de superfície e modos superiores, projeta-se  $h < 0,1 \lambda_0 / \sqrt{\epsilon_r}$ .

# Phillip Hagar Smith (1905–1987)

---



Phillip H. Smith (Bell Labs,  
1939).

*“Desde a época em que comecei a calcular linhas de transmissão com réguas de cálculo, procurei uma representação gráfica que eliminasse as tediosas repetições com funções hiperbólicas complexas.”*

- ▶ Engenheiro pioneiro da RCA e Bell Telephone Laboratories;
- ▶ Criou em 1939 a mais famosa e duradoura ferramenta gráfica da engenharia de RF e micro-ondas: a **Carta de Smith**;
- ▶ Desenvolvida independentemente no Japão por Tosaku Mizuhashi em 1937.

# A Transformação Conforme Bilinear e o Plano $\Gamma$

Seja a impedância normalizada  $z = Z/Z_0 = r + jx$ . A relação fundamental com o coeficiente de reflexão complexo  $\Gamma = u + jv$  é dada pelo **mapeamento bilinear de Möbius**:

$$\Gamma = \frac{z - 1}{z + 1} \iff z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

## O Plano de Reflexão

$$\Gamma = u + jv$$

- ▶  $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta} = u + jv$ ;
- ▶ Cargas passivas ( $r \geq 0$ ) mapeiam-se **dentro** do disco unitário  $|\Gamma| \leq 1$ ;
- ▶ Converte o semiplano infinito  $r \geq 0$  em uma região circular compacta.

## Propriedades de Mapeamento Conforme

- ▶ **Preservação de Ângulos:** Ortogonalidade no plano  $z$  é mantida no plano  $\Gamma$ ;
- ▶ Retas de  $r$  e  $x$  constantes transformam-se em **círculos ortogonais**;
- ▶ Elimina operações exaustivas com funções hiperbólicas complexas.



# Dedução das Famílias Geométricas ( $r$ e $x$ )

Substituindo  $\Gamma = u + jv$  em  $z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$  e racionalizando pelo conjugado:

$$r + jx = \frac{(1 - u^2 - v^2) + j2v}{(1 - u)^2 + v^2} \implies r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}, \quad x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}$$

## Círculos de Resistência $r$ Constante

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$

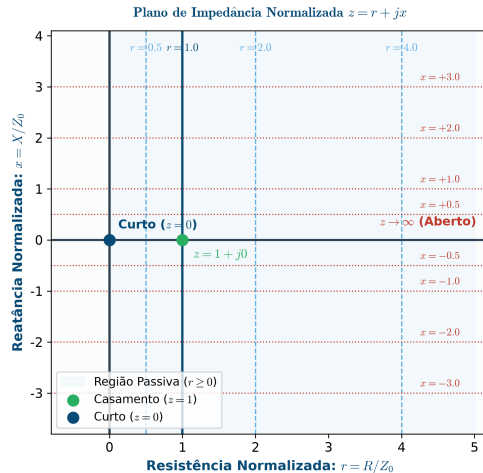
- ▶ Centro:  $\left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$  no eixo real;
- ▶ Raio:  $R_r = \frac{1}{1+r}$ ;
- ▶ Passam por  $(1, 0)$  (circuito aberto).

## Arcos de Reatância $x$ Constante

$$(u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

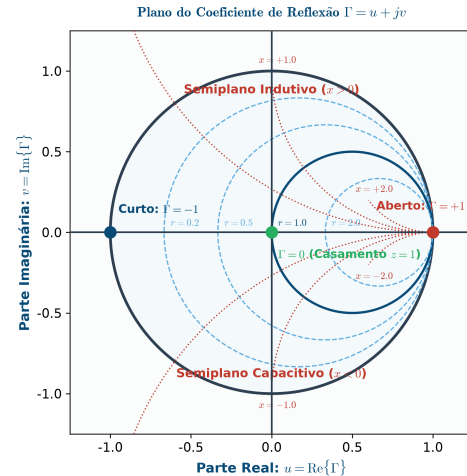
- ▶ Centro:  $\left(1, \frac{1}{x}\right)$  na reta  $u = 1$ ;
- ▶ Raio:  $R_x = \frac{1}{|x|}$ ;
- ▶  $x > 0$ : indutivo (superior);
- ▶  $x < 0$ : capacitivo (inferior).

# Mapeamento Conforme: Do Plano $z$ ao Plano $\Gamma$



$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$$

$\Rightarrow$



## Princípio da Compactação Conforme de Möbius

A transformação  $\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$  mapeia todo o semiplano passivo  $r \geq 0$  no disco unitário  $|\Gamma| \leq 1$ , preservando a ortogonalidade das famílias de curvas circulares.

# Topologia, Regiões e Pontos Notáveis da Carta

## Pontos Singulares da Carta

- ▶ **Centro**  $(0,0)$ : Casamento ideal ( $z = 1 \iff Z = Z_0$ ,  $\Gamma = 0$ , TOE = 1);
- ▶ **Extremo Esquerdo**  $(-1,0)$ : Curto-circuito ( $z = 0$ ,  $\Gamma = -1$ );
- ▶ **Extremo Direito**  $(+1,0)$ : Circuito aberto ( $z \rightarrow \infty$ ,  $\Gamma = +1$ ).

## Regiões e Fronteiras Físicas

- ▶ **Borda Unitária** ( $|\Gamma| = 1$ ): Reativo puro ( $r = 0$ , sem dissipação);
- ▶ **Eixo Horizontal Central** ( $v = 0$ ): Cargas puramente resistivas ( $x = 0$ );
- ▶ **Semiplano Superior** ( $v > 0$ ): Reatância indutiva ( $x > 0$ );
- ▶ **Semiplano Inferior** ( $v < 0$ ): Reatância capacitiva ( $x < 0$ ).

# Dinâmica de Linhas: Rotação e Círculos de TOE

Ao longo de uma linha de transmissão sem perdas, a reflexão varia com a posição  $\ell$ :

$$\Gamma(\ell) = \Gamma_L e^{-j2\beta\ell} = |\Gamma_L| e^{j(\theta_L - 2\beta\ell)}$$

## Regra de Rotação Espacial:

- ▶ Afastando-se da carga para o gerador ( $\ell$  cresce), a fase decresce à taxa de  $2\beta\ell$ ;
- ▶ Rotação no **sentido horário** (*Toward Generator*);
- ▶ Uma volta completa ( $360^\circ$ )  
 $\iff \ell = \lambda/2$  (meia onda!).

## Círculos de TOE Constante

- ▶ Em linha sem perdas,  $|\Gamma| = \text{constante}$  descreve um **círculo concêntrico**;
- ▶ **Leitura direta da TOE:** No intercepto com o eixo real à direita ( $u > 0, v = 0$ ):

$$r_{\max} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \text{TOE}$$

# A Carta de Admitâncias ( $Y$ ) e Inversão por $\lambda/4$

Para elementos em paralelo (*stubs*), somam-se admitâncias normalizadas  $y = Y/Y_0 = g + jb$ :

## Relação Conforme em Admitância

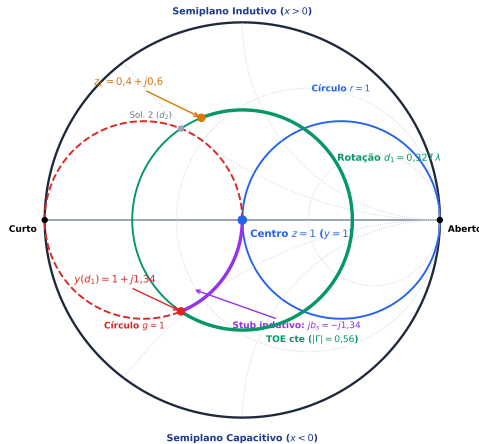
$$y = \frac{1}{z} \implies \Gamma_y = -\Gamma_z = \Gamma_z e^{\pm j\pi}$$

- ▶ Transição  $z \leftrightarrow y \iff$  **rotação de  $180^\circ$  ( $\lambda/4$ )**;
- ▶ Linha de  $\lambda/4$  atua como inversor de impedância ( $z_{\text{in}} = 1/z_L$ ).

## Curvas de Admitância ( $g$ e $b$ )

- ▶ **Círculos de Condutância  $g$ :**  
Tangentes a  $(-1, 0)$   
(curto-circuito);
- ▶ **Círculo  $g = 1$ :** Passa pelo centro; alvo para casamento paralelo;
- ▶ **Susceptâncias  $b$  na Carta:**
  - ▶  $+jb$  ( $b > 0$ ): capacitivo (semiplano inferior);
  - ▶  $-jb$  ( $b < 0$ ): indutivo (semiplano superior).

# Casamento de Impedâncias e Sintonia por *Stub*



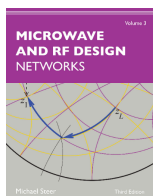
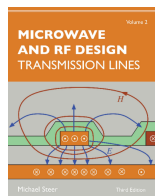
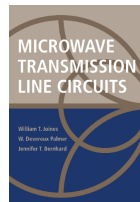
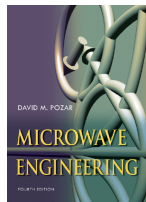
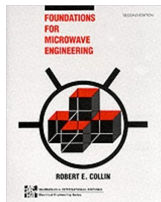
Trajetória de casamento por *stub* simples paralelo.

## Técnica do *Stub* Simples Paralelo:

1. **Locação da Carga  $z_L$ :** Plota-se  $z_L$  e traça-se o círculo concêntrico de  $|\Gamma|$  (TOE constante);
2. **Deslocamento pela Linha ( $d$ ):** Gira-se no sentido horário até interceptar o círculo  $g = 1$  ( $y(d_1) = 1 + j1,34$ );
3. **Anulação de Susceptância ( $b_{\text{stub}}$ ):** Conecta-se em paralelo um trecho (*stub*) indutivo tal que:

$$b_{\text{stub}} = -1,34 \implies y_{\text{total}} = 1 + j0$$

**Resultado:** Carga casada no centro ( $Z_{\text{in}} = Z_0$ ) sem componentes discretos!



Literatura de referência em RF e  
micro-ondas.

## Obras Fundamentais Recomendadas:

1. **Pozar, D. M.** *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, 2011. (Capítulo 2: Teoria de Linhas; Capítulo 3: Microstrip).
2. **Cheng, D. K.** *Field and Wave Electromagnetics*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1989. (Capítulo 9: Transmission Lines).
3. **Edwards, T. C. & Steer, M. B.** *Foundations for Microstrip Circuit Design*, 4th ed., Wiley-IEEE Press, 2016.
4. **Balanis, C. A.** *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd ed., Wiley, 2012.
5. **Smith, P. H.** “Transmission line calculator”, *Electronics*, vol. 12, pp. 29–31, 1939.