

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

# [MOD-MAT] Matrizes de Redes e Dispositivos de RF

Análise Matricial  $[Z]$ ,  $[Y]$ ,  $[ABCD]$  e  $[S]$ ,  
Divisores e Acopladores

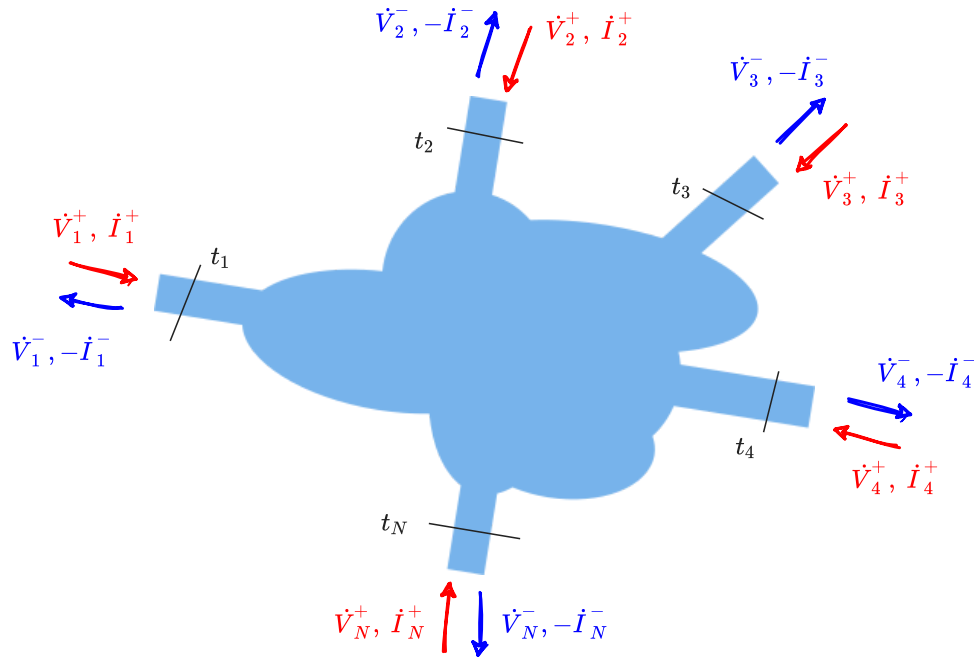
**Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto**

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-FOTON



1. Análise de Elementos de Redes - Matrizes
2. Divisores de Potência e Acopladores

# Representação por Matrizes



# Representação por Matrizes - Matriz Impedância

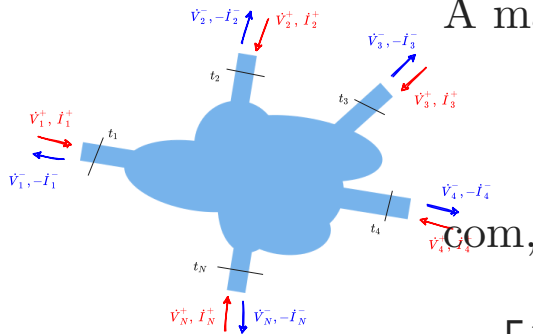
Em  $z = 0$  (plano de referência)

$$\dot{V}_n = \dot{V}_n^+ + \dot{V}_n^- \quad (1a)$$

$$\dot{I}_n = \dot{I}_n^+ - \dot{I}_n^- \quad (1b)$$

A matriz Impedância  $[Z]$  é definida por:

$$[\dot{V}] = [Z] [\dot{I}] \quad (2)$$

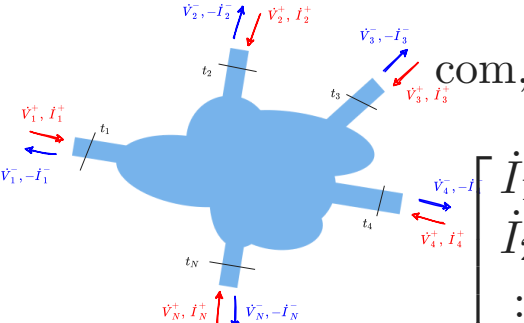


$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ Z_{N1} & \cdots & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} \quad (3)$$

# Representação por Matrizes - Matriz Admitância

De forma similar temos a matriz Admitância  $[Y]$  definida por:

$$[\dot{I}] = [Y] [\dot{V}] \quad (4)$$



com,

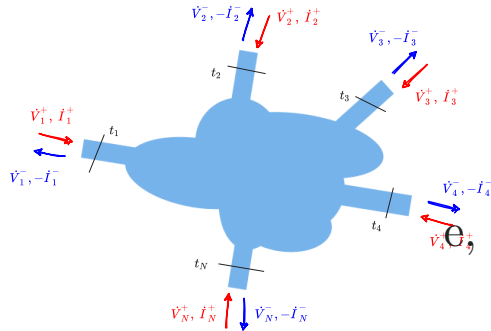
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Y_{N1} & \cdots & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

e,

$$[Y] = [Z]^{-1} \quad (6)$$

# Representação por Matrizes

Para as Eqs. (3) e (5) podemos definir:



$$Z_{ij} = \left. \frac{\dot{V}_i}{\dot{I}_j} \right|_{\dot{I}_k=0 \text{ para } k \neq j} \quad (7)$$

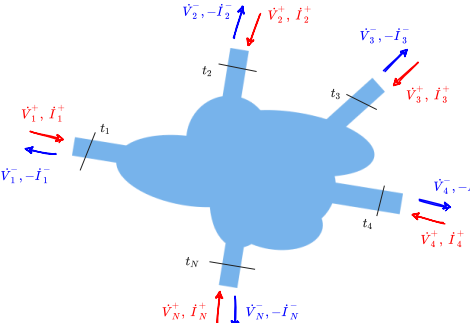
$$Y_{ij} = \left. \frac{\dot{I}_i}{\dot{V}_j} \right|_{\dot{V}_k=0 \text{ para } k \neq j} \quad (8)$$

# Representação por Matrizes - Matriz Espalhamento

A matriz **Espalhamento**  $[S]$  é definida por:

$$[\dot{V}^-] = [S] [\dot{V}^+] \quad (9)$$

com,



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1^- \\ \dot{V}_2^- \\ \vdots \\ \dot{V}_N^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ S_{N1} & \cdots & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1^+ \\ \dot{V}_2^+ \\ \vdots \\ \dot{V}_N^+ \end{bmatrix} \quad (10)$$

e

$$S_{ij} = \left. \frac{\dot{V}_i^-}{\dot{V}_j^+} \right|_{\dot{V}_k^+ = 0 \text{ para } k \neq j} \quad (11)$$

# Propriedades Importantes das Matrizes

## Teorema da Reciprocidade

$$[Z] \rightarrow Z_{ij} = Z_{ji} \quad (12a)$$

$$[Y] \rightarrow Y_{ij} = Y_{ji} \quad (12b)$$

$$[S] \rightarrow [S]^T = [S] \quad (12c)$$

$$(12d)$$

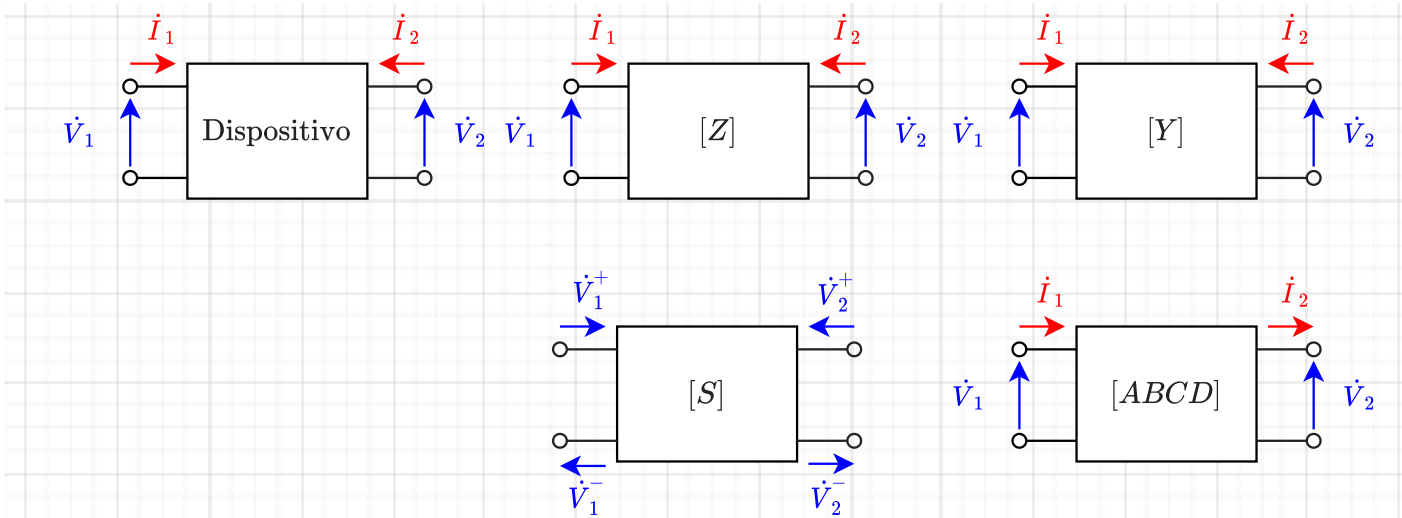
## Sistemas sem Perdas

$$[Z] \rightarrow \Re[Z_{ij}] = 0 \quad (13a)$$

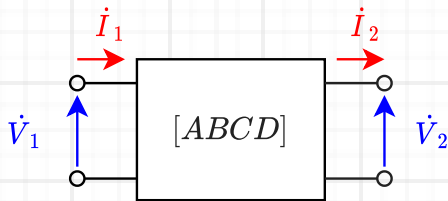
$$[Y] \rightarrow \Re[Y_{ij}] = 0 \quad (13b)$$

$$[S] \rightarrow \sum_{i=1}^N S_{ij} S_{ji}^* = 0 \quad i \neq j \text{ e } \sum_{i=1}^N S_{ij} S_{ji}^* = 1 \quad i = j \quad (13c)$$

# Representação por Matrizes - Quadripolos



# Representação por Matrizes - Matriz ABCD



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Para a Eq. (14) podemos definir:

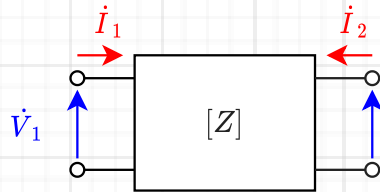
$$A = \left. \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad (15)$$

$$B = \left. \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{V}_2=0} \quad (16)$$

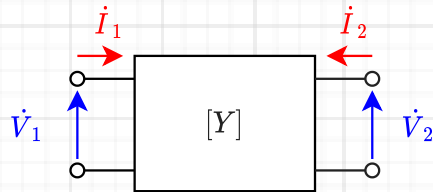
$$C = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad (17)$$

$$D = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{V}_2=0} \quad (18)$$

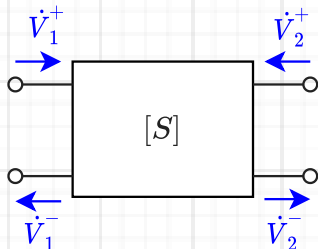
# Representação por Matrizes - Quadripolos



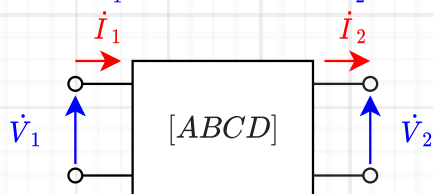
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

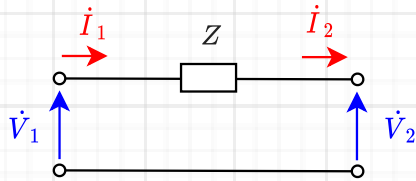


$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1^- \\ \dot{V}_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1^+ \\ \dot{V}_2^+ \end{bmatrix}$$

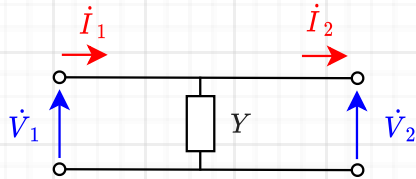


$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

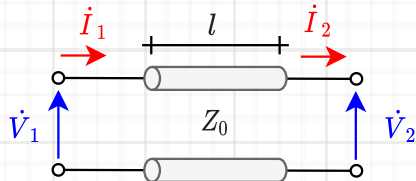
# Matriz ABCD de Alguns Circuitos



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$$

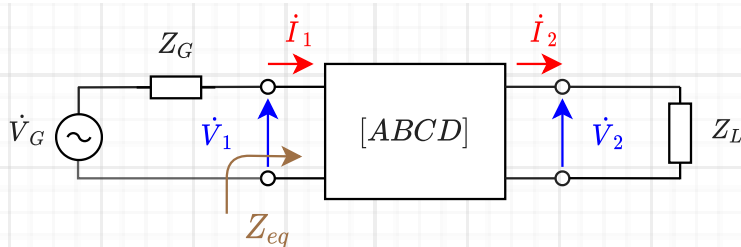


$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ Y_0 \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix}$$

Para a LT sem perdas,  $\gamma = j\beta$  e

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta l & jZ_0 \sin \beta l \\ jY_0 \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix}$$

# Matriz ABCD: Tensões e Correntes



$$\dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B\dot{I}_2 \quad (19a)$$

$$\dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D\dot{I}_2 \quad (19b)$$

$$\dot{V}_2 = Z_L \dot{I}_2 \quad (19c)$$

Dividindo Eq. (19a) por Eq. (19b), temos:

$$\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{V}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{V}_2 + D\dot{I}_2} \quad (20)$$

Substituindo Eq. (19c) na Eq. (20)

$$\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = Z_{eq} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D} \quad (21)$$

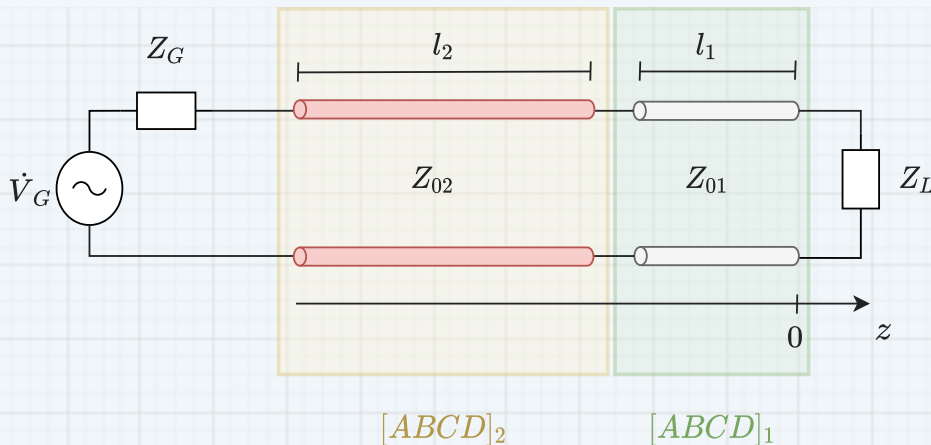
Dessa forma, é possível calcular

$$\dot{V}_1 = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + Z_G} \dot{V}_G = \frac{AZ_L + B}{(A + CZ_G)Z_L + B + DZ_G} \dot{V}_G \quad (22a)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_G}{Z_{eq} + Z_G} = \frac{CZ_L + D}{(A + CZ_G)Z_L + B + DZ_G} \dot{V}_G \quad (22b)$$

## Problema Proposto 2 - Solução via Matriz ABCD

Determine  $v(z, t)$  e  $i(z, t)$  para a linha de transmissão:

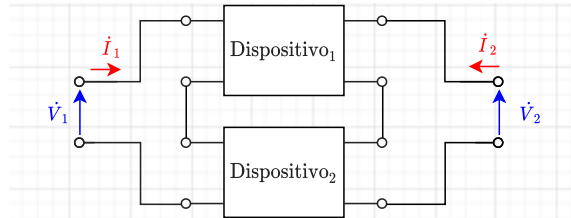


$$[ABCD] = [ABCD]_2 [ABCD]_1 \quad (23a)$$

$$[ABCD] = \begin{bmatrix} \cosh \gamma_2 l_2 & Z_{02} \sinh \gamma_2 l_2 \\ Y_{02} \sinh \gamma_2 l_2 & \cosh \gamma_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \gamma_1 l_1 & Z_{01} \sinh \gamma_1 l_1 \\ Y_{01} \sinh \gamma_1 l_1 & \cosh \gamma_1 l_1 \end{bmatrix} \quad (23b)$$

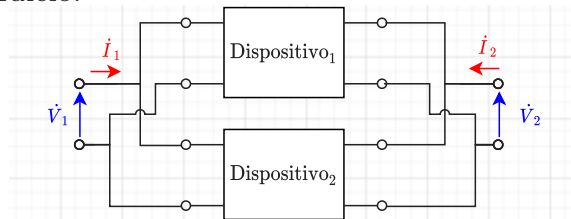
# Associação de Quadripolos (Matrizes)

Série:



$$[Z_{eq}] = [Z_1] + [Z_2] + \cdots + [Z_N]$$

Paralelo:



$$[Y_{eq}] = [Y_1] + [Y_2] + \cdots + [Y_N]$$

Cascata:



$$[ABCD_{eq}] = [ABCD_1][ABCD_2] \cdots [ABCD_N]$$

# Conversão entre Matrizes

---

$$[\mathbf{Z}] \leftrightarrow [\mathbf{ABCD}]$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \begin{bmatrix} A & (AD - BC) \\ 1 & D \end{bmatrix} \quad (24a)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & (Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}) \\ 1 & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (24b)$$

$$[\mathbf{ABCD}] \leftrightarrow [\mathbf{S}]$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \frac{1}{2S_{21}} \begin{bmatrix} (1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21} & Z_0[(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}] \\ Y_0[(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}] & (1 - S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21} \end{bmatrix} \quad (25a)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A + BY_0 - CZ_0 - D & 2(AD - BC) \\ 2 & -A + BY_0 - CZ_0 + D \end{bmatrix} \quad (25b)$$

# Divisores de Potência e Acopladores

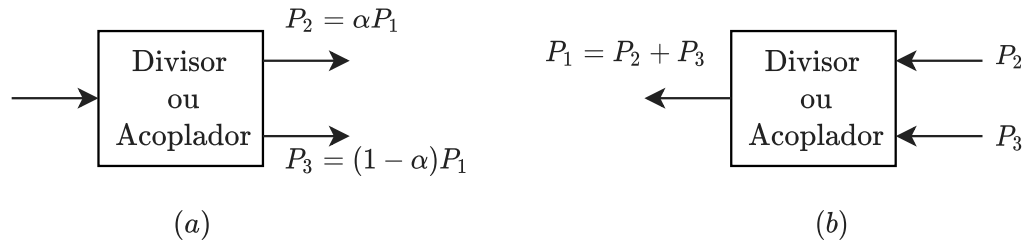


Figura 1: Divisores de potência e combinadores. (a) Divisor de potência. (b) Acoplador de potência.

**Divisor:** Saída em fase, em geral 3 dB;

**Acoplador:** Divisão de potência arbitrária, não recíproco;

**Híbrida:** Divisão igual de potência, defasagem de  $90^\circ$  e  $180^\circ$ .

# Divisores de Potência e Acopladores: Junção T

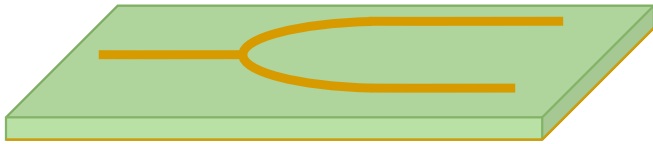


Figura 2: Junção T em Microstrip.

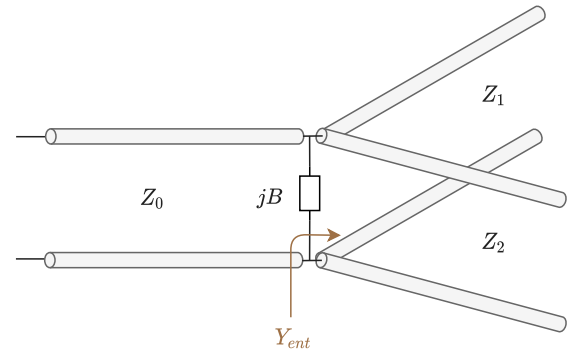


Figura 3: Modelo de L.T. para a junção T.

# Divisores de Potência e Acopladores: Junção T

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Caso ideal: Recíproca e com todas as três portas casadas:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \quad (28a)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (28b)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \quad (28c)$$

$$S_{13}^* S_{23} = 0 \quad (28d)$$

$$S_{23}^* S_{12} = 0 \quad (28e)$$

$$S_{12}^* S_{13} = 0 \quad (28f)$$

Pelo menos dois dos três parâmetros ( $S_{12}, S_{13}, S_{22}$ ) nas Eqs. (28) são zero, portanto uma junção T **NÃO PODE** ser simultaneamente recíproca e sem perdas.

# Divisor de Wilkinson

---

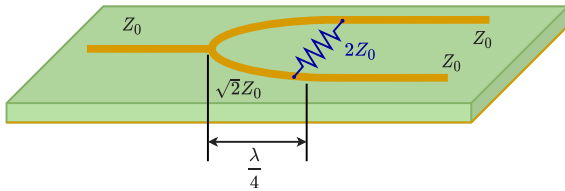


Figura 4: O Divisor de Wilkinson em Microstrip.

$$S_{11} = 0 \quad (29a)$$

$$S_{22} = S_{33} = 0 \quad (29b)$$

$$S_{12} = S_{21} = -j/\sqrt{2} \quad (29c)$$

$$S_{13} = S_{31} = -j/\sqrt{2} \quad (29d)$$

$$S_{23} = S_{32} = 0 \quad (29e)$$

# Acoplador Direcional



Figura 5: Tipos de acopladores direcionais.

$$S_{12} = S_{34} = \alpha \quad (31a)$$

$$S_{13} = \beta e^{j\theta} \quad (31b)$$

$$S_{24} = \beta e^{j\phi} \quad (31c)$$

$$S_{12}^* S_{13} + S_{24}^* S_{34} = 0 \quad (31d)$$

$$\theta + \phi = \pi \pm 2n\pi \quad (31e)$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

# Acoplador Direcional

---

O Acoplador simétrico:

$$\theta = \phi = \pi/2$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & j\beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & j\beta \\ j\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & j\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

O Acoplador assimétrico:

$$\theta = \phi = \pi/2$$

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta \\ j\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (34)$$

$$\text{Acoplamento} = C = 10 \log \frac{P_1}{P_3} = -20 \log \beta \text{ [dB]} \quad (35a)$$

$$\text{Diretividade} = D = 10 \log \frac{P_3}{P_4} = 20 \log \frac{\beta}{|S_{14}|} \text{ [dB]} \quad (35b)$$

$$\text{Isolação} = I = 10 \log \frac{P_1}{P_4} = -20 \log |S_{14}| \text{ [dB]} \quad (35c)$$

$$\text{Perda de Inserção} = L = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = -20 \log |S_{12}| \text{ [dB]} \quad (35d)$$

$$I = D + C \text{ [dB]} \quad (35e)$$

# Divisores de Potência e Acopladores

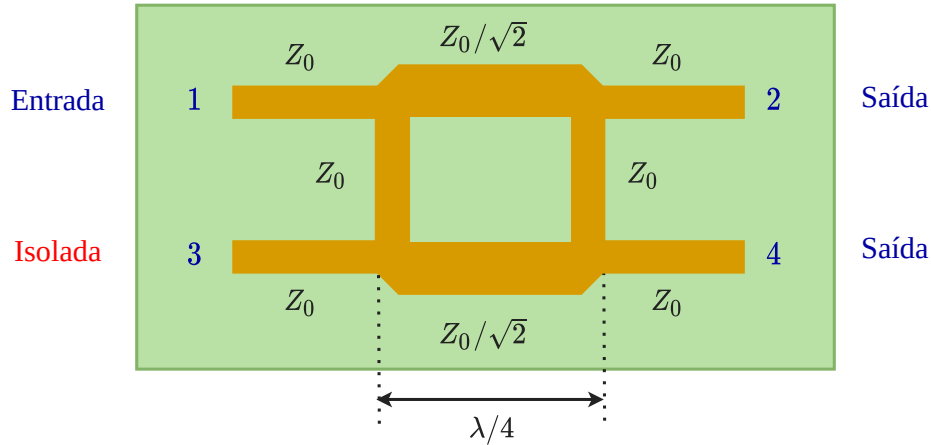


Figura 6: Geometria de uma híbrida.

# Divisores de Potência e Acopladores

---

Uma **Híbrida** é um caso especial de acopladores direcionais onde o fator de acoplamento ( $C$ ) é 3 dB, oque implica em  $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ . A híbrida em quadratura tem uma defasagem de  $90^\circ$  entre as portas 2 e 3 ( $\theta = \phi = \pi/2$ )

FIM!  
Mas é temporário!