

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

Métodos Numéricos em Eletromagnetismo

Diferenças Finitas no Domínio do Tempo
(FDTD 1D e 2D) com Python

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-FOTON



1. Introdução ao Método FDTD
2. A Grade Escalonada de Yee
3. Estabilidade CFL e Condições de Contorno
4. Implementação Computacional em Python

Por que Métodos Numéricos no Domínio do Tempo?

- ▶ **Limitações Analíticas:** Soluções analíticas exatas existem apenas para geometrias canônicas altamente simétricas.
- ▶ **O Método FDTD (Kane Yee, 1966):**
 - ▶ Discretização direta das equações rotacionais de Maxwell no espaço e no tempo;
 - ▶ Banda ultralarga: a resposta transitória a um único pulso fornece o comportamento em ampla faixa de frequências via FFT;
 - ▶ Suporta meios heterogêneos, não-lineares e dispersivos.

Referência Básica

Houle, J. E., Sullivan, D. M., *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method with Python*, Wiley-IEEE Press, 2020.

Discretização Espacial e Temporal (Leap-frog)

Considerando uma onda propagando-se em x com E_z e H_y :

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Equações de Atualização (Update Equations):

$$H_y^{n+1/2} \left(k + \frac{1}{2} \right) = H_y^{n-1/2} \left(k + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_z^n(k+1) - E_z^n(k)]$$

$$E_z^{n+1}(k) = E_z^n(k) + \frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} \left[H_y^{n+1/2} \left(k + \frac{1}{2} \right) - H_y^{n+1/2} \left(k - \frac{1}{2} \right) \right]$$

Eficiência

O algoritmo é totalmente explícito: não requer inversão de grandes matrizes!

Critério de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Para garantir a estabilidade numérica (evitar crescimento exponencial dos campos):

$$S = c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (\text{em 1D}), \quad \Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (\text{em 2D})$$

Condições de Contorno Absorventes (ABC):

- ▶ **Mur de 1ª Ordem (1D):** Elimina reflexões espúrias nas bordas da grade computacional;
- ▶ **Camadas Perfeitamente Casadas (PML - Berenger):** Absorção anisotrópica sem descontinuidade de impedância.

Estrutura do Código FDTD 1D com NumPy

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

ke = 200; nsteps = 400
ex = np.zeros(ke); hy = np.zeros(ke)
kc = ke // 2; t0 = 40; spread = 12

for t in range(nsteps):
    # 1. Atualiza campo magnetico Hy
    hy[:-1] += 0.5 * (ex[1:] - ex[:-1])

    # 2. Atualiza campo eletrico Ex
    ex[1:] += 0.5 * (hy[1:] - hy[:-1])

    # 3. Fonte Gaussiana suave
    ex[kc] += np.exp(-0.5 * ((t - t0) / spread)**2)

    # 4. Condicao de contorno absorvente de Mur...
```