

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

[MOD-GUI] Guias de Ondas e Modos de Propagação

Guias Metálicos Ocos, Guias Dielétricos
Planares (SOI) e Fibras Ópticas

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-FOTON



1. Conceito de Modo e Decomposição de Helmholtz
2. O Guia Retangular Metálico Oco
3. Técnicas Práticas de Excitação de Modos
4. O Guia Circular Metálico Oco e Funções de Bessel
5. O Guia Dielétrico Planar (Slab) e a Fotônica em Silício
6. Fibras Ópticas Cilíndricas e Modos LP
7. O Grande Contraste Tecnológico e Matriz Comparativa

O Que É um Modo de Propagação?

► Limitação de Linhas Bifilares em Altas Frequências:

- Em micro-ondas ($f > 30$ GHz) e frequências ópticas (193 THz), condutores abertos sofrem severas perdas por radiação e atenuação.
- Estruturas fechadas e dielétricas confinam a energia eletromagnética.

► Definição Física de Modo:

- Configuração espacial transversal invariante de campo que se propaga em z com velocidade e constante de fase β bem definidas.
- Campos fasoriais harmônicos ($e^{j\omega t}$ e $e^{-j\beta z}$):

$$\tilde{E}(x, y, z) = \left[\tilde{E}_T(x, y) + \hat{a}_z \dot{E}_z(x, y) \right] e^{-j\beta z}$$

$$\tilde{H}(x, y, z) = \left[\tilde{H}_T(x, y) + \hat{a}_z \dot{H}_z(x, y) \right] e^{-j\beta z}$$

Equações de Acoplamento Transversal

Substituindo $\nabla = \nabla_T - j\beta\hat{a}_z$ em $\nabla \times \tilde{E} = -j\omega\mu\tilde{H}$ e $\nabla \times \tilde{H} = j\omega\varepsilon\tilde{E}$:

Campos Elétricos Transversais:

$$\dot{E}_x = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)$$

$$\dot{E}_y = \frac{-j}{k_c^2} \left(\beta \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \omega\mu \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)$$

Campos Magnéticos Transversais:

$$\dot{H}_x = \frac{j}{k_c^2} \left(\omega\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right)$$

$$\dot{H}_y = \frac{-j}{k_c^2} \left(\omega\varepsilon \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right)$$

Equações de Onda de Helmholtz Transversais

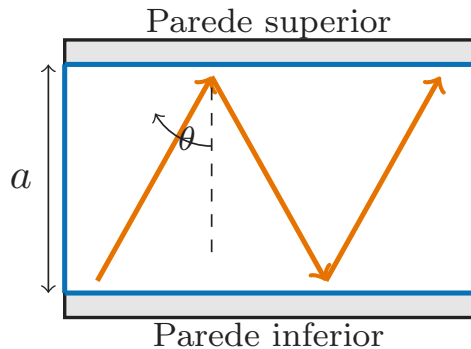
$$\nabla_T^2 \dot{E}_z + k_c^2 \dot{E}_z = 0, \quad \nabla_T^2 \dot{H}_z + k_c^2 \dot{H}_z = 0$$

com o número de onda de corte $k_c^2 = k^2 - \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon - \beta^2$.

Classificação dos Modos de Propagação

Modo	Componentes Axiais	Características Físicas e Exemplos
TEM	$\dot{E}_z = 0, \dot{H}_z = 0$	Requer ≥ 2 condutores isolados. $k_c = 0 \implies f_c = 0$. (Coaxial, microfitas).
TE	$\dot{E}_z = 0, \dot{H}_z \neq 0$	Campo elétrico puramente transversal (H -modes). (Guias retangulares e circulares).
TM	$\dot{H}_z = 0, \dot{E}_z \neq 0$	Campo magnético puramente transversal (E -modes). (Guias metálicos e juntas de radar).
Híbridos	$\dot{E}_z \neq 0, \dot{H}_z \neq 0$	Coexistência em interfaces dielétricas abertas. (Fibras ópticas HE/EH e guias planares).

Interpretação Física por Ondas em Zigue-Zague



- ▶ Superposição de ondas que refletem com ângulo θ :

$$k_x = k \cos \theta, \quad \beta = k \sin \theta$$

- ▶ **Coerência Transversal:**

$$2k_x a - 2\pi = 2m\pi \implies k_x = \frac{m\pi}{a}$$

- ▶ **Corte ($f \rightarrow f_c$):**

$$\theta \rightarrow 0 \implies k_x = k, \beta = 0.$$

Reflexão normal sem propagação em z .

Velocidades de Fase, Grupo e a Relação $v_p \cdot v_g = c^2$

Dispersão Geométrica ($\beta < k$)

$$\beta(f) = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = \frac{\omega}{u} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

Velocidade de Fase (v_p):

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{u}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} > u$$

Planos de fase constante. No vácuo,
 $v_p > c$.

Velocidade de Grupo (v_g):

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = u \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < u$$

Transporte de energia. Em $f = f_c$,
 $v_g = 0$.

Relação Canônica

$$v_p \cdot v_g = u^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \xrightarrow{\text{vácuo}} v_p \cdot v_g = c^2$$

Inexistência de Modos TEM em Guias Ocos (I)

Por que um condutor oco fechado não suporta modo TEM?

Por definição, em um modo TEM: $\dot{E}_z = 0$ e $\dot{H}_z = 0$.

- ▶ Para admitir campos não-nulos, $k_c = 0 \implies \beta = k$.
- ▶ Das equações de Maxwell rotacionais e divergentes no dielétrico:

$$\nabla_T \cdot \tilde{E}_T = 0 \quad \text{e} \quad \nabla_T \times \tilde{E}_T = 0$$

- ▶ Como $\nabla_T \times \tilde{E}_T = 0$, o campo é derivado de um potencial:

$$\tilde{E}_T(x, y) = -\nabla_T \Phi(x, y)$$

- ▶ Da divergência nula, resulta a **Equação de Laplace**:

$$\nabla_T^2 \Phi(x, y) = 0$$

Inexistência de Modos TEM em Guias Ocos (II)

Condição de Contorno de Condutor Perfeito

A parede condutora fechada C é equipotencial:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 = \text{constante.}$$

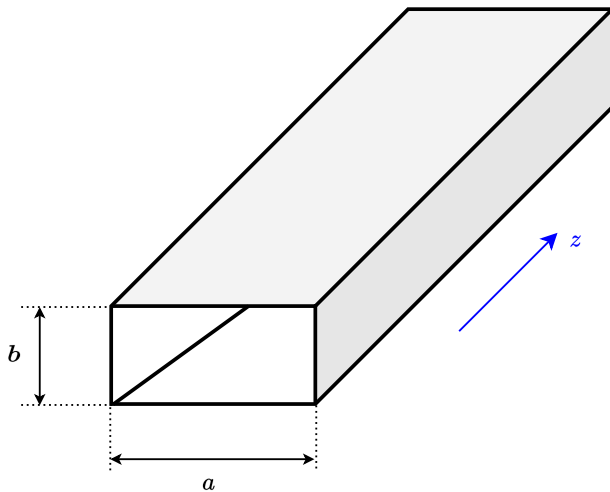
- ▶ Pelo **Teorema da Unicidade de Laplace**, uma função harmônica com contorno constante em região simplesmente conexa é constante em todo o interior:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{E}_T = -\nabla_T \Phi_0 = 0$$

- ▶ Assim, $\tilde{E} \equiv 0$ e $\tilde{H} \equiv 0$ no interior do guia oco.

Conclusão Fundamental

Modos TEM exigem pelo menos **dois condutores isolados** (ex: coaxial ou microfita) para sustentar diferença de potencial não nula.



Guia de Onda Retangular:

Dimensões transversais $a \times b$ ($a > b$),
propagação ao longo de $+z$.

Helmholtz Transversal

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) \psi(x, y) = 0$$

- ▶ Separação:
 $\psi(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$.
- ▶ Relação: $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$.
- ▶ Condições de condutor perfeito (PEC):

$$\dot{E}_x(x, 0) = \dot{E}_x(x, b) = 0$$

$$\dot{E}_y(0, y) = \dot{E}_y(a, y) = 0$$

Campo Longitudinal $\dot{H}_z$ ($\dot{E}_z = 0$)

$$\dot{H}_z(x, y, z) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \quad (m, n \neq 0, 0)$$

Componentes Transversais de Campo:

$$\dot{E}_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$\dot{E}_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$\dot{H}_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

$$\dot{H}_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}$$

Modos Transversais Magnéticos (TM_{mn})

Campo Longitudinal $\dot{E}_z$ ($\dot{H}_z = 0$)

$$\dot{E}_z(x, y, z) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-j\beta z}, \quad (m \geq 1, n \geq 1)$$

Restrição dos Modos TM

Se $m = 0$ ou $n = 0$, $\sin(0) = 0 \implies \dot{E}_z \equiv 0$. Logo, **não existem modos TM_{m0} nem TM_{0n}** . O modo TM de mais baixa ordem é obrigatoriamente o **TM_{11}** .

Campos transversais são proporcionais a β para $\vec{E}_T$ e a $\omega\epsilon$ para $\vec{H}_T$.

Parâmetros de Propagação: f_c , β , λ_g e Impedâncias

Frequência de Corte Geral:

$$f_{c,mn} = \frac{u}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Constante de Fase Axial:

$$\beta = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

- ▶ $f > f_c$: β real $\implies$ propagante.
- ▶ $f < f_c$: $\beta = -j\alpha \implies$ evanescente.

Comprimento de Onda Guiado:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} > \lambda$$

Impedâncias de Onda:

$$\eta_{\text{TE}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} > \eta$$

$$\eta_{\text{TM}} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < \eta$$

O Modo Dominante TE_{10} e a Razão $a \approx 2b$

Campos do Modo TE_{10} ($m = 1, n = 0$)

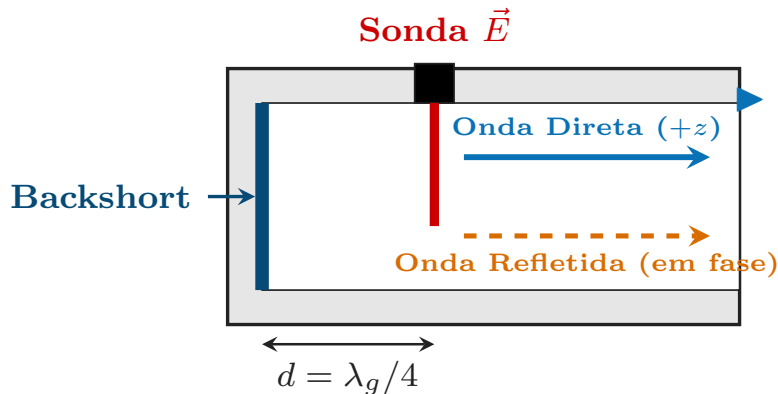
$$\dot{E}_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}, \quad \dot{H}_x = -\frac{\dot{E}_y}{\eta_{\text{TE}}}, \quad \dot{H}_z = j \frac{\pi E_0}{\omega \mu a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-j\beta z}$$

$$f_{c,10} = \frac{u}{2a}, \quad \lambda_{c,10} = 2a$$

Por que Adotar a Razão $a \approx 2b$?

- ▶ Se $a \approx 2b$: $f_{c,20} = 2f_{c,10}$ e $f_{c,01} \approx 2f_{c,10}$.
- ▶ O modo TE_{10} possui **uma oitava inteira (fator 2:1)** de largura de banda monomodo, livre de modos superiores!
- ▶ Padrão EIA **WR-90** (Banda X: 8,2–12,4 GHz): $a = 22,86$ mm, $b = 10,16$ mm, $f_{c,10} = 6,557$ GHz.

Sonda Coaxial (E -Probe) e o Backshort a $\lambda_g/4$



- ▶ **Alinhamento:** Condutor inserido na parede superior em $x = a/2$, paralelo a $\vec{E}_y$.

Regra dos $\lambda_g/4$:

- ▶ Reflexão no fundo:
 $\Delta\phi = \pi$.
- ▶ Percurso ida e volta:
 $2d = \lambda_g/2 \implies \Delta\phi = \pi$.
- ▶ Defasagem total = 2π .
- ▶ A onda refletida soma-se em **fase construtiva** com a onda direta!

Laço Magnético (H -Loop) e Excitação Seletiva de TE_{20}

Laço Indutivo (H -Loop)

- ▶ Espira soldada na parede do guia.
- ▶ Normal da área orientada paralelamente às linhas de $\vec{H}$.
- ▶ Indução por Faraday:

$$\mathcal{V}_{\text{ind}} = -j\omega \iint \tilde{B} \cdot \hat{n} dA$$

Excitação Seletiva para TE_{20}

- ▶ O modo TE_{20} possui lóbulos opostos em $x = a/4$ e $x = 3a/4$.
- ▶ Alimentam-se **duas sondas E -probe** em **oposição de fase** (180°).
- ▶ A simetria anti-fase anula o modo TE_{10} e acopla puramente o modo TE_{20} !

Equação de Onda em Coordenadas Cilíndricas

Helmholtz Polar para $\psi(r, \phi)$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_c^2 \psi = 0$$

Separando $\psi(r, \phi) = R(r) \cos(n\phi)$:

Equação Diferencial de Bessel

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k_c^2 r^2 - n^2) R = 0$$

Solução: $R(r) = C_1 J_n(k_c r) + C_2 Y_n(k_c r)$.

Descarte da Função de Neumann $Y_n(x)$

Como $Y_n(x) \rightarrow -\infty$ para $x \rightarrow 0$, a finitude da energia impõe $C_2 = 0$:

$$R(r) = C_1 J_n(k_c r)$$

Modos TM_{nm} e TE_{nm} : Raízes de Bessel

Modos TM_{nm} ($\dot{H}_z = 0$):

- ▶ Contorno em $r = a$:

$$\dot{E}_z(a, \phi) = 0 \rightarrow J_n(k_c a) = 0$$

- ▶ Zeros de J_n denotados por p_{nm} :

$$k_{c,nm} = p_{nm}/a$$

$$f_{c,nm} = p_{nm}u/(2\pi a)$$

Modos TE_{nm} ($\dot{E}_z = 0$):

- ▶ Contorno em $r = a$:

$$\dot{E}_\phi(a, \phi) = 0 \rightarrow J'_n(k_c a) = 0$$

- ▶ Zeros da derivada J'_n (p'_{nm}):

$$k_{c,nm} = p'_{nm}/a$$

$$f_{c,nm} = p'_{nm}u/(2\pi a)$$

Tabela de Raízes e Sequência Modal do Guia Circular

Ordem n	p'_{n1} (TE $_{n1}$)	p'_{n2} (TE $_{n2}$)	p_{n1} (TM $_{n1}$)	p_{n2} (TM $_{n2}$)
0	3,8317 (TE $_{01}$)	7,0156 (TE $_{02}$)	2,4048 (TM $_{01}$)	5,5201 (TM $_{02}$)
1	1,8412 (TE$_{11}$)	5,3314 (TE $_{12}$)	3,8317 (TM $_{11}$)	7,0156 (TM $_{12}$)
2	3,0542 (TE $_{21}$)	6,7061 (TE $_{22}$)	5,1356 (TM $_{21}$)	8,4172 (TM $_{22}$)

Sequência em

Ordem Crescente de Corte:

1. **TE $_{11}$** ($p'_{11} \approx 1,8412$) $\rightarrow$ **Modo Dominante;**
2. TM $_{01}$ ($p_{01} \approx 2,4048$);
3. TE $_{21}$ ($p'_{21} \approx 3,0542$);
4. **TE $_{01}$ e TM $_{11}$** ($p'_{01} = p_{11} \approx 3,8317$) $\rightarrow$ **Degenerescência Exata** ($J'_0 = -J_1$).

Modos Especiais: TM_{01} e TE_{01} no Guia Circular

Modo TM_{01} : Radar

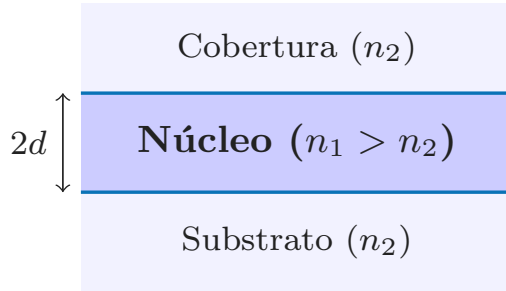
- ▶ Simetria radial pura ($\partial/\partial\phi = 0$).
- ▶ Campos invariantes sob rotação axial mecânica.
- ▶ Padrão para **juntas rotativas de antena de radar!**

Modo TE_{01} : Baixa Perda

- ▶ Corrente na parede é puramente azimutal ($\vec{J}_s = -\hat{\phi}\dot{H}_z$).
- ▶ Sem corrente axial.
- ▶ **Atenuação decresce com f :**

$$\alpha_c \propto \frac{1}{\sqrt{f}}$$

Guia Dielétrico Planar: Reflexão Interna Total



- Confinamento por **Reflexão Interna Total (RIT)**
($\theta > \theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$).

- No núcleo ($|x| \leq d$):

$$u_x = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}$$

- Na casca ($|x| > d$):

$$\gamma_x = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}$$

- Faixa de índice efetivo guiado:

$$n_2 < n_{\text{eff}} = \frac{\beta}{k_0} < n_1$$

Equações de Dispersão e o Salto em *Slot Waveguides*

Equações de Dispersão Transcendentais

- ▶ **Modos TE:** $\tan(u_x d) = \frac{\gamma_x}{u_x}$ (par) e $-\cot(u_x d) = \frac{\gamma_x}{u_x}$ (ímpar)
- ▶ **Modos TM:** $\tan(u_x d) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\gamma_x}{u_x}$ (par) e $-\cot(u_x d) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\gamma_x}{u_x}$ (ímpar)

O Salto Normal em TM e os *Slot Waveguides* (SOI)

Pela condição de contorno $\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}$:

$$E_{2\perp} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 E_{1\perp} \approx \left(\frac{3,45}{1,44}\right)^2 E_{1\perp} \approx \mathbf{5,74 E_{1\perp}}$$

O campo óptico é amplificado em $\sim 574\%$ na nanofenda de baixo índice, potencializando sensores biológicos e moduladores integrados!

Parâmetros V , b , Confinamento Γ e Modo Sem Corte TE_0

Frequência Normalizada (V):

$$V = \frac{2\pi d}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Índice Efetivo Normalizado (b):

$$b = \frac{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \in [0, 1]$$

Fator de Confinamento (Γ):

$$\Gamma_{\text{TE}_0} = \frac{1 + \frac{\sin(2u)}{2u}}{1 + \frac{\sin(2u)}{2u} + \frac{\cos^2(u)}{w}}$$

(No Silício 220 nm, $\Gamma \approx 81\%$).

O Modo Fundamental TE_0 Não Tem Frequência de Corte!

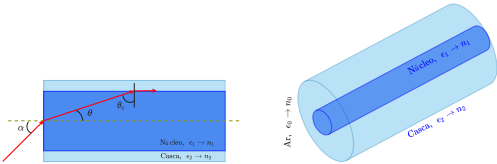
Em guias simétricos, para qualquer $V > 0$, existe sempre solução guiada real ($V_c = 0$). Operação monomodo:

$$0 < V < \frac{\pi}{2}$$

Fibras Ópticas e Teoria de Gloge ($\Delta \ll 1$)

Guiamento Fraco ($\Delta \ll 1$)

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1} \approx 0,36\% \ll 1$$



Núcleo de sílica ($a = 4,1 \mu\text{m}$) e
casca ($n_2 \approx 1,444$).

- ▶ Modos vetoriais tornam-se quase-degenerados.
- ▶ Superposição origina os **Modos LP**_{lm}.
- ▶ Abertura Numérica: $\text{NA} \approx 0,12$.
- ▶ Parâmetro normalizado de fibra:

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \text{NA}$$

Condição Monomodo ($V < 2,4048$) e Fórmula de Marcuse

Corte Monomodo da Fibra Óptica

O modo fundamental é LP_{01} ($V_c = 0$). O modo LP_{11} corta em $p_{01} \approx 2,4048$:

$$V < 2,4048 \implies \lambda_0 > \lambda_c = \frac{2\pi a \text{ NA}}{2,4048}$$

Na fibra padrão SMF-28, $\lambda_c \approx 1310$ nm. Em $\lambda = 1550$ nm, $V \approx 2,039$ (100% monomodo).

Diâmetro de Campo Modal (MFD) — Marcuse (1977)

$$\frac{w_0}{a} \approx 0,65 + \frac{1,619}{V^{3/2}} + \frac{2,879}{V^6}$$

Para SMF-28 em 1550 nm:

$$\text{MFD} = 2w_0 \approx \mathbf{10,22 \mu m} \quad (\text{Nominal Corning: } 10,4 \pm 0,5 \mu m)$$

Fotônica em Silício (SOI) vs Fibras de Sílica

Parâmetro	Fotônica em Silício (SOI)	Fibra Óptica (SMF-28)
Materiais	Si (3,45) / SiO ₂ (1,44)	Sílica dopada (1,450) / Sílica (1,444)
Contraste Δn	$\Delta n \approx 2,03$ (Ultra-alto)	$\Delta n \approx 0,005$ (Baixo)
Dimensão do Núcleo	220 nm $\times$ 500 nm	Diâmetro $2a \approx 8,2 \mu\text{m}$
Raio Mínimo de Curva	$R \approx 5 \mu\text{m}$	$R \approx 30$ mm (5000$\times$ maior)
Atenuação Típica	1,5 dB/cm	0,18 dB/km em 1550 nm
Aplicação	Transceptores em chip, PICs	Redes metropolitanas e submarinas

Por que λ_0 (nm) na Óptica e f (GHz) nas Micro-ondas?

- ▶ **Micro-ondas:** Osciladores eletrônicos e VNAs baseados em contagem de ciclos temporais ($1/T$).
- ▶ **Óptica:** Espectrômetros e redes de difração medem diretamente a separação espacial dos comprimentos de onda ($\Delta x \propto \lambda$).

Matriz Comparativa Definitiva das Quatro Geometrias

Característica	Guia Retangular	Guia Circular	Guia Slab SOI	Fibra Óptica
Confinamento	Condutor Elétrico (PEC)	Condutor Elétrico (PEC)	Reflexão Interna Total	Reflexão Interna Total
Equação de Onda	Helmholtz Cartesiana	Bessel Cilíndrica	Transcendental	Gloge com Bessel (J_l, K_l)
Modo Fundamental	TE ₁₀	TE ₁₁	TE ₀ (par)	LP ₀₁ (HE ₁₁)
Corte Fundamental	$f_c = u/(2a)$	$f_c = 1,8412u/(2\pi a)$	Sem corte ($V_c = 0$)	Sem corte ($V_c = 0$)
Monomodo	$f_{c,10} < f < 2f_{c,10}$	$1,84 < k_c a < 2,40$	$0 < V < \pi/2$	$0 < V < 2,4048$
Campo Exterior	Nulo (blindado)	Nulo (blindado)	Cauda evanescente	Cauda evanescente
Destaque	Máxima potência RF	Radar (TM ₀₁), TE ₀₁	*Slot waveguides*	Cabos submarinos

Próximo Módulo: *Módulo 7: Radiação Eletromagnética,
Antenas Elementares & Bioeletromagnetismo*