UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

[MOD-CAS] Técnicas de Casamento de Impedância de Banda Larga

Bode-Fano, Círculos de Fator Q, Transformadores de Chebyshev e Taper de Klopfenstein

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-FOTON





Sumário do Módulo [MOD-CAS]

1. O Desafio da Banda Larga em Sistemas 5G e 6G
2. O Teorema dos Limites de Bode-Fano
3. Carta de Smith e Círculos de Fator Q Constante
4. Transformadores Multi-Seções de Quarto de Onda ($\lambda/4$)
5. Linhas Taperadas Contínuas e o Taper de Klopfenstein
6. Stubs Radiais Planares (*Fan Stubs*)
7. Modelagem Computacional e Rigor Bibliográfico

Do Casamento em Frequência Única às Demandas 5G/6G

- **Limitação dos Casadores em Frequência Única:**
  - Redes em L (2 componentes discretos) ou *stubs* simples sintonizam em f_0;
  - Fora de f_0, a variação da reatância degrada rapidamente o casamento (FBW $\leq 5\% - 10\%$).

- **Demandas Contemporâneas de Sistemas de RF:**
  - **5G FR2 (mmWave):** 24,25 GHz – 40 GHz ($\Delta f \approx 16$ GHz, FBW $\approx 50\%$);
  - **6G Sub-THz:** Portadoras de 100 GHz – 300 GHz com canais dezenas de GHz de largura;
  - **Transceptores Optoeletrônicos e SAR:** Operação sobre múltiplas oitavas ($f_2/f_1 \geq 2$).

Meta dos Circuitos Planares de Banda Larga: Manter $|\Gamma| \leq -10$ dB a -15 dB sobre faixas fracionárias superiores a $60\% - 100\%$.

Largura de Banda Fracionária (FBW) e Oitavas

Definição Formal de Largura de Banda Fracionária (FBW)

$$\text{FBW} = \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_2 - f_1}{(f_1 + f_2)/2} = 2\,\frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$$

Comparação de Desempenho entre Tecnologias de Casamento:

Topologia de Casamento	**FBW Típica**	**Características e Aplicação**
Rede em L Concentrada	$3\% - 8\%$	2 elementos reativos, sintonia fixa
Stub Simples Retangular	$5\% - 12\%$	Microfita convencional
Transformador $\lambda/4$ Único	$10\% - 20\%$	Seção discreta para carga resistiva
Transformador Binomial (3 seções)	$30\% - 50\%$	Maximamente plano (*flat*)
Transformador Chebyshev (3 seções)	$\mathbf{60\% - 85\%}$	Ondulação Γ_m, máxima banda
Taper de Klopfenstein	$\mathbf{> 100\%}$	Perfil contínuo ótimo para 5G/6G

Métricas Fundamentais: Coeficiente de Reflexão e Perda de Retorno

Relações no Domínio da Frequência:

- **Reflexão Complexa:**

$$\Gamma(\omega) = \frac{Z_{\text{in}}(\omega) - Z_0}{Z_{\text{in}}(\omega) + Z_0}$$

- **Perda de Retorno (*Return Loss*):**

$$\text{RL}(\omega) = -20 \log_{10} |\Gamma(\omega)| \ [\text{dB}]$$

- **Razão de Onda Estacionária:**

$$\text{ROE}(\omega) = \frac{1 + |\Gamma(\omega)|}{1 - |\Gamma(\omega)|}$$

Critérios Práticos de Aceitação

- $|\Gamma| \leq 0{,}316 \implies \text{RL} \geq 10$ dB ($\text{ROE} \leq 1{,}92$)
  $\approx 90\%$ da potência transmitida à carga;
- $|\Gamma| \leq 0{,}178 \implies \text{RL} \geq 15$ dB ($\text{ROE} \leq 1{,}43$)
  $\approx 97\%$ da potência transmitida;
- $|\Gamma| \leq 0{,}100 \implies \text{RL} \geq 20$ dB ($\text{ROE} \leq 1{,}22$)
  Padrão para instrumentação e calibração.

O Teorema Fundamental de Bode-Fano (1945 / 1950)

A Pergunta Central da Engenharia de Micro-ondas:

> *"Dada uma carga complexa passiva* $Z_L(\omega) = R_L(\omega) + jX_L(\omega)$*, qual é a reflexão mínima fisicamente alcançável por qualquer rede casadora passiva e sem perdas ao longo de uma largura de banda* $\Delta\omega$*?"*

- **Hendrik W. Bode (1945):** Provou o limite fundamental para cargas RC paralelas;
- **Robert M. Fano (1950):** Generalizou para cargas reativas arbitrárias via teoria de funções reais positivas e transformada de Hilbert no plano complexo $s = \sigma + j\omega$.



Rede sem perdas acoplando Z_0 a carga reativa Z_L.

As Quatro Integrais Canônicas de Bode-Fano

1. Carga RC Paralela ($R \parallel C$)

$$\int_0^\infty \ln\left(\frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\right) d\omega \leq \frac{\pi}{RC}$$

2. Carga RC Série ($R + C$)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2} \ln\left(\frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\right) d\omega \leq \pi RC$$

3. Carga RL Série ($R + L$)

$$\int_0^\infty \ln\left(\frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\right) d\omega \leq \frac{\pi R}{L}$$

4. Carga RL Paralela ($R \parallel L$)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2} \ln\left(\frac{1}{|\Gamma(\omega)|}\right) d\omega \leq \frac{\pi L}{R}$$

Significado Físico: A área sob a curva $\ln(1/|\Gamma|)$ é finita e rigorosamente limitada pela constante de tempo da carga (RC ou L/R).

O Ineludível *Trade-off*: Banda Passante versus Reflexão

Aproximando a resposta ótima por um filtro passa-faixa ideal de reflexão constante $|\Gamma_m|$ sobre a faixa $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \ln\left(\frac{1}{|\Gamma_m|}\right) d\omega = \Delta\omega \ln\left(\frac{1}{|\Gamma_m|}\right) \leq \frac{\pi}{RC}$$

Isolando o Coeficiente Mínimo de Reflexão:

$$|\Gamma_m| \geq \exp\left(-\frac{\pi}{\Delta\omega\, RC}\right)$$

- Se $\Delta\omega \to 0$ (banda estreita) $\implies |\Gamma_m| \to 0$ (casamento perfeito);
- Se $\Delta\omega \uparrow$ (banda larga) $\implies |\Gamma_m| \uparrow$ (reflexão residual inevitável).

Conclusão Prática

Impossibilidade Teórica: É fisicamente impossível casar perfeitamente ($|\Gamma| = 0$) uma carga reativa sobre qualquer banda não-nula com elementos passivos.

Compromisso: O projetista deve arbitrar entre nível de reflexão tolerado e largura de banda utilizável.

Fator de Qualidade Nodal (Q) e Banda Fracionária

- **Definição do Fator de Qualidade Nodal:**

$$Q = \frac{|X|}{R} \quad \text{(série)} \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{|B|}{G} \quad \text{(paralelo)}$$

- **Relação Direta com a Banda Passante:**

$$\text{FBW} \approx \frac{1}{Q_{\text{máx}}}$$

Quanto maior o Q em qualquer nó intermediário da rede, mais estreita será a largura de banda e maior a sensibilidade do circuito a desvios de processo e temperatura.

Círculos de Q Constante na Carta de Smith

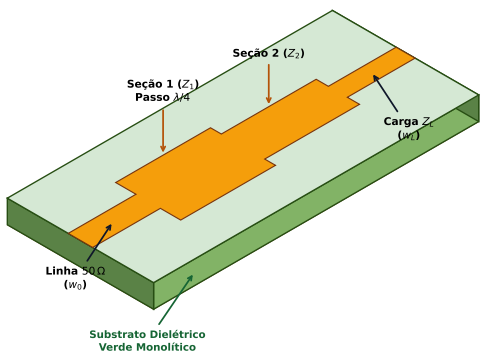
No plano $z = r + jx$, as curvas onde $Q = \text{const}$ formam arcos circulares:

$$r^2 + (x \pm 1/Q)^2 = (1/Q)^2$$

O Salto Físico de Impedância em Linhas Planares (Microfita)

Como se Materializa o Casamento em PCB?

- **Controle de Z_0 pela Largura (w):**
  - Pista Larga ($w \uparrow$): Maior capacitância distribuída $\Longrightarrow$ $\mathbf{Z_0} \downarrow$;
  - Pista Estreita ($w \downarrow$): Maior indutância distribuída $\Longrightarrow$ $\mathbf{Z_0} \uparrow$.
- **Degraus em Cascata (*Stepped Lines*):**
  - Saltos de impedância são seções contíguas de larguras $w_1, w_2, \ldots$ no mesmo substrato;
  - Cada seção tem comprimento $\ell_n \approx \lambda_g/4$ na frequência central f_0.



Linha de microfita com saltos de impedância ($Z_0 \to Z_1 \to Z_2 \to R_L$).

A Regra de Ouro da Carta de Smith para Projetos de Banda Larga

Diretrizes de Trajetória na Carta ZY:

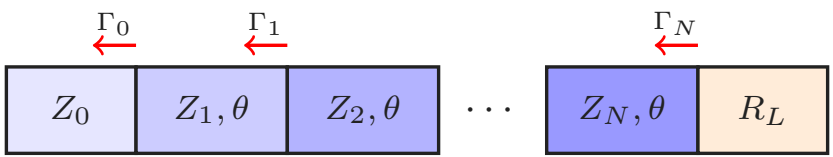
1. **Evitar as Bordas da Carta:** As regiões de $r \ll 1$ ou $r \gg 1$ têm $Q > 10$, estrangulando a resposta;
2. **Dividir o Salto de Impedância:** Em vez de um salto abrupto de $50\,\Omega \rightarrow 200\,\Omega$ em um único nó, realizar múltiplos saltos graduais através de nós intermediários;
3. **Manter $Q_{\text{nó}} < 2$:** Cada trecho intermediário deve permanecer contido no interior dos círculos de $Q \leq 2$.

Técnica de Absorção Reativa

Princípio de Steer / Pozar:
Em vez de anular a reatância da carga com um elemento ressonante de mesmo módulo e sinal oposto em f_0 (o que gera Q altíssimo fora de f_0), a reatância da carga é **absorvida** como o primeiro elemento de um filtro passa-baixas ou Chebyshev de ordem superior.

Teoria das Pequenas Reflexões para N Seções

Considere N seções consecutivas de linhas com comprimentos elétricos iguais $\theta = \beta l$ e impedâncias características $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$:



Para reflexões parciais fracas $|\Gamma_n| \ll 1$, o coeficiente de reflexão total de entrada é dado por:

$$\Gamma(\theta) \approx \Gamma_0 + \Gamma_1 e^{-j2\theta} + \Gamma_2 e^{-j4\theta} + \cdots + \Gamma_N e^{-j2N\theta}$$

onde $\Gamma_n = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} \approx \frac{1}{2} \ln\left(\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right)$.

Transformadores Binomiais (Maximamente Planos)

Critério de Projeto: Forçar as $N-1$ primeiras derivadas de $|\Gamma(\theta)|$ a se anularem na frequência central $\theta_0 = \pi/2$ ($f = f_0$).

Síntese Binomial Analítica

$$\Gamma(\theta) = A\left(1 + e^{-j2\theta}\right)^N = 2^N A e^{-jN\theta}\cos^N(\theta)$$

$$\Gamma_n = 2^{-N}\binom{N}{n}\ln\left(\frac{R_L}{Z_0}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots, N$$

Largura de Banda Fracionária Tolerada ($|\Gamma| \leq \Gamma_m$):

$$\text{FBW} = 2 - \frac{4}{\pi}\arccos\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma_m}{|\ln(R_L/Z_0)|}\right)^{1/N}\right]$$

Características

- Resposta perfeitamente suave na banda central sem ondulação (*flat*);
- Transição rápida para reflexão total fora da banda; largura de banda moderada.

Transformadores de Chebyshev (Equal-Ripple)

Critério de Projeto: Tolerar uma ondulação controlada Γ_m na banda passante em troca da **máxima largura de banda possível** para uma dada ordem N.

Síntese via Polinômios de Chebyshev $T_N(x)$

$$\Gamma(\theta) = e^{-jN\theta}\,\Gamma_m\,T_N\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_m}\right)$$

onde $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, e
$\sec\theta_m = \cosh\left[\frac{1}{N}\operatorname{arcosh}\left|\frac{\ln(R_L/Z_0)}{2\Gamma_m}\right|\right]$.

Largura de Banda Fracionária Ótima:

$$\text{FBW} = 2 - \frac{4}{\pi}\theta_m$$

Vantagem de Chebyshev

Para o mesmo número de seções N e mesma tolerância Γ_m, o transformador de Chebyshev atinge uma **largura de banda sensivelmente superior** à do transformador binomial.

Da Transição Discreta à Linha Taperada Contínua ($N \to \infty$)

Ao fazer o número de seções tender ao infinito com comprimento infinitesimal dz, a transição discreta torna-se uma linha contínua de impedância variável $Z_0(z)$ sobre um comprimento físico total L:

Integral de Reflexão Contínua (Steer / Pozar)

$$\Gamma(\beta) = \frac{1}{2}\int_0^L e^{-j2\beta z}\,\frac{d}{dz}\left[\ln\left(\frac{Z_0(z)}{Z_0(0)}\right)\right] dz$$

- O coeficiente de reflexão $\Gamma(\beta)$ é proporcional à **Transformada de Fourier espacial** do gradiente logarítmico de impedância $\frac{d}{dz}\ln Z_0(z)$;
- **Taper Linear:** $Z_0(z) = Z_0 + (R_L - Z_0)(z/L) \implies \Gamma \propto \mathrm{sinc}(\beta L)$ (lento decaimento dos lóbulos);
- **Taper Exponencial:** $Z_0(z) = Z_0\, e^{az} \implies$ atua como filtro passa-altas com reflexão oscilatória residual.

O Taper Ótimo de Klopfenstein (1956)

Derivado por Ralph W. Klopfenstein a partir do limite dos polinômios de Chebyshev quando $N \to \infty$:

- **Otimização Extrema:** Para um dado comprimento L, garante a menor reflexão máxima Γ_m; ou para um dado Γ_m, fornece o menor comprimento físico L.

Resposta Analítica de Reflexão de Klopfenstein

$$\Gamma(\beta) = \Gamma_0 \, e^{-j\beta L} \, \frac{\cos\left(\sqrt{(\beta L)^2 - A^2}\right)}{\cosh A}, \quad \text{para } \beta L > A$$

onde $A = \operatorname{arcosh}\left(\frac{\Gamma_0}{\Gamma_m}\right)$ e $\Gamma_0 = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$.

Condição Passa-Altas: Para frequências onde $\beta L > A$, a reflexão nunca ultrapassa $|\Gamma(\beta)| \leq \Gamma_m$, mantendo-se estritamente abaixo do teto de projeto em todas as frequências mais altas!

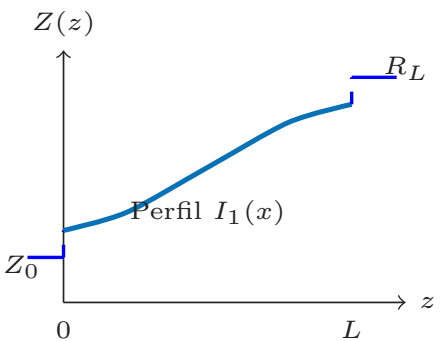
Perfil de Impedância e Saltos de Borda (*End-Steps*)

O perfil ótimo de impedância $Z_0(z)$ é dado por:

$$\ln Z_0(z) = \frac{1}{2}\ln(Z_0 R_L) + \frac{\Gamma_0}{\cosh A}\,\Phi(2z/L - 1, A)$$

onde $\Phi(x, A)$ envolve a função de Bessel modificada (I_1):

$$\Phi(x, A) = \int_0^x I_1\left(A\sqrt{1-y^2}\right)\frac{A}{\sqrt{1-y^2}}dy$$



Perfil de impedância com saltos nas bordas.

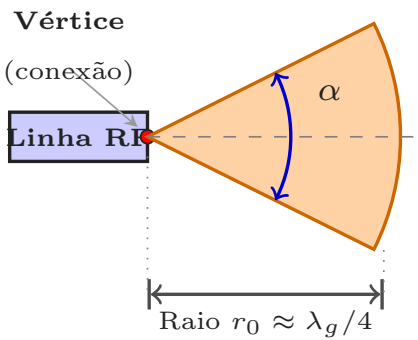
Saltos Discretos de Borda (*Steps*)

O taper de Klopfenstein apresenta **dois pequenos saltos discretos** nas extremidades $z = 0$ e $z = L$, essenciais para alcançar a resposta ótima de Chebyshev!

Por que Usar *Stubs* Radiais em Circuitos Planares?

Limitações do *Stub* Retangular ($f > 10$ GHz):

- **Incerteza do Ponto de Conexão:** Para linhas largas, a junção T torna-se bidimensional;
- **Curva Íngreme de Reatância:** $X(f) = -Z_0 \cot(\beta l)$ cruza o zero rapidamente, estreitando a banda;
- **Degradação Rápida:** O curto-circuito de RF degrada-se fora de f_0.



Geometria em leque do *stub* radial planar.

Vantagens do *Stub* Radial em Redes de Polarização (*Bias-Tee*)

- **Ponto de Junção Físico Estritamente Definido:** O vértice conecta-se à linha de transmissão em um ponto unívoco, eliminando incertezas de fase na junção;
- **Impedância Característica Decrescente com o Raio:**

$$Z_0(r) \propto \frac{1}{\alpha \cdot r}$$

  A impedância diminui para a borda externa, reduzindo drasticamente o Q do ressonador;
- **Curto-Circuito Virtual de Banda Larga:** Fornece uma impedância de entrada nula ($Z_{\text{in}} \approx 0$) no vértice sobre uma faixa até 3 vezes mais larga do que um *stub* reto retangular;
- **Eliminação de Vias de Aterramento:** Ideal para redes de polarização DC (*bias-tee*) e desacoplamento de RF em transistores GaN/GaAs sem indutâncias parasitas de furos metalizados (*vias*).

Síntese e Análise em Python com *scikit-rf*

```
import skrf as rf
import numpy as np

# Definindo linha e carga de teste
f = rf.Frequency(1, 10, 501, 'ghz')
z0, r_load = 50.0, 150.0

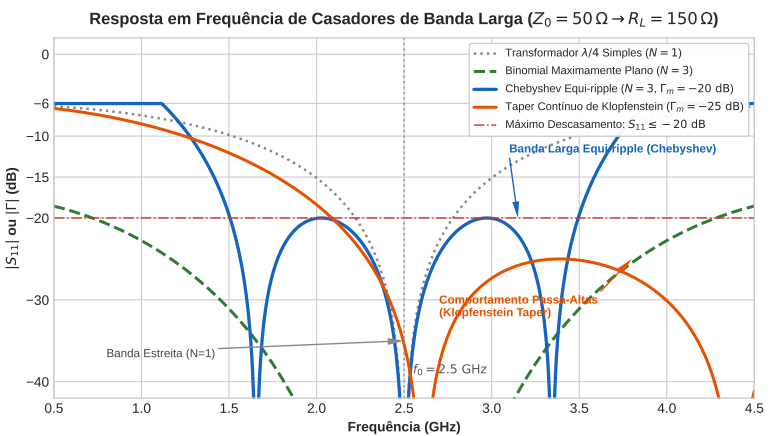
# Síntese de Taper de Klopfenstein
gamma_0 = (r_load - z0) / (r_load + z0)
gamma_m = 10**(-25/20) # -25 dB ripple
A = np.arccosh(gamma_0 / gamma_m)

# Linhas de transmissão em cascata
# calculando matriz [S] resultante...
# Avalia FBW > 80% com S11 < -25 dB!
```

Simulações Interativas no Portal

- Acesse o simulador de Carta de Smith e casador de impedâncias no portal: Carta de Smith Interativa;
- Visualize os círculos de Q e trajetórias de banda larga em tempo real.

Resposta em Frequência Comparada (*scikit-rf*)



Simulação comparativa ($Z_0 = 50\,\Omega \to R_L = 150\,\Omega$, $f_0 = 2{,}5$ GHz).

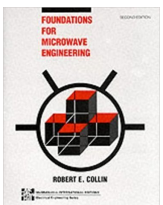
Compromissos de Projeto:

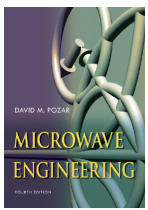
- **Seção Única ($\lambda/4$):** Nulo único em f_0; banda estreita (FBW $\approx 15\%$).
- **Binomial ($N = 3$):** Maximamente plano; derivada nula de $|\Gamma|$ em f_0.
- **Chebyshev ($N = 3$):** Maior largura de banda fracionária para tolerância $\Gamma_m \leq -20$ dB.
- **Klopfenstein Taper:** Transição contínua ótima com comportamento passa-altas.

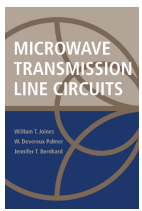
Simulador Online

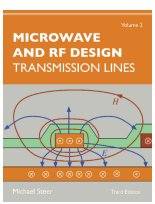
Experimente os parâmetros interativamente no portal: Módulo MOD-CAS.

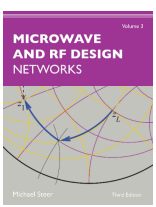
Obras Clássicas e Bibliografia Canônica











Literatura canônica de RF e micro-ondas.

Referências Fundamentais Recomendadas:

1. **Steer, M. B.** *Microwave and RF Design, Volume 3: Networks*, 3rd ed., North Carolina State University Open Textbook Library, 2019. (Cap. 6: Impedance Matching; Cap. 7: Broadband Matching).
2. **Pozar, D. M.** *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, 2011. (Capítulo 5: Impedance Matching and Tuning).
3. **Bode, H. W.** *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, D. Van Nostrand, 1945.
4. **Fano, R. M.** "Theoretical limitations on the broadband matching of arbitrary impedances", *J. Franklin Inst.*, 1950.
5. **Klopfenstein, R. W.** "A transmission line taper of improved design", *Proc. IRE*, vol. 44, 1956.