UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

[MOD-LT] Linhas de Transmissão e Estruturas Planares

Equações dos Telegrafistas, Microfita (*Microstrip*) e Carta de Smith

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-Foton





Sumário da Apresentação

1. Introdução e Limite dos Circuitos Concentrados
2. Modelo Distribuído e Equações dos Telegrafistas
3. Linhas Sem Perdas e Propagação de Ondas
4. Reflexão, Descasamento e Impedância de Entrada
5. Linhas Impressas e Teoria da Microfita (*Microstrip*)
6. Fundamentos Matemáticos da Carta de Smith
7. Rigor Bibliográfico e Referências Recomendadas

James Clerk Maxwell e o Pensamento Investigativo



J. C. Maxwell (1831–1879).

"O estudante que usa equipamentos caseiros, que sempre dão errado, muitas vezes aprende mais do que quem usa instrumentos cuidadosamente ajustados, nos quais ele pode confiar e que não ousa desmontar."

- Nos Módulos 1 a 3, estudamos as ondas eletromagnéticas livres e em interfaces;
- Para transportar sinais e potência de forma confinada e eficiente, recorremos a **estruturas condutoras guiadas**: as **linhas de transmissão**.

O Critério do Comprimento Elétrico e o Tempo de Trânsito

Parâmetros Concentrados ($\ell \ll \lambda$)

- Tempo de trânsito t_d desprezível frente a t_r;
- Leis de Kirchhoff (LKT e LKC) pontuais e instantâneas;
- Tensão e corrente uniformes ao longo de toda a trilha.

Colapso e Parâmetros Distribuídos

- Condição crítica de propagação:

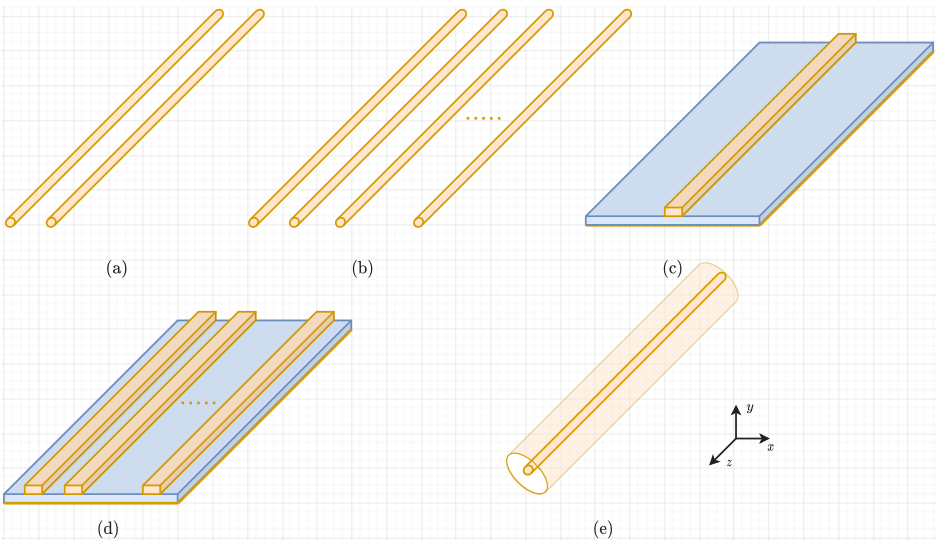
$$\ell \gtrsim 0{,}01\lambda \iff t_d \gtrsim 0{,}1\, t_r$$

- Ondas espaço-temporais $v(z,t)$ e $i(z,t)$;
- Surgem reflexões, defasagens e ressonâncias.

Significado Físico das Variáveis

- ℓ (l): Comprimento da linha [m]
- λ: Comprimento de onda (v_p/f) [m]
- v_p: Velocidade de fase ($c/\sqrt{\varepsilon_r}$)
- t_d: Atraso de trânsito (ℓ/v_p) [s]
- t_r: Tempo de subida (10%–90%)
- **Critério:** $t_d \geq 0{,}1\, t_r \implies$ linha longa

Tipos Comuns de Linhas de Transmissão (2 Condutores)



Linha Bifilar

Baixo custo, alta impedância (300 Ω), uso em linhas aéreas e dipolos.

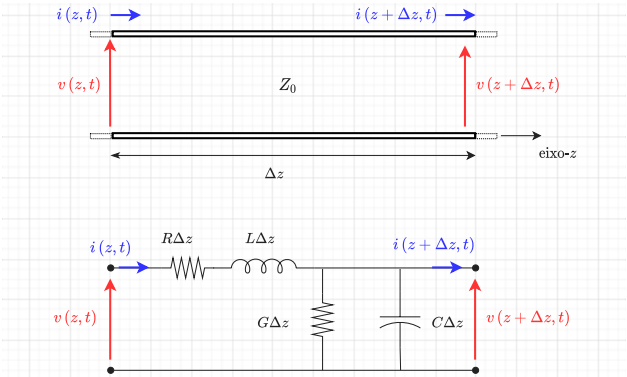
Cabo Coaxial

Blindagem total, modo TEM puro, 50 Ω e 75 Ω em RF e vídeo.

Linha de Fita / Microfita

Geometria planar para PCBs e MMICs, modo quase-TEM, fácil integração.

Célula Circuital Infinitesimal (Δz)



Uma seção infinitesimal de comprimento Δz é modelada por 4 parâmetros primários por unidade de comprimento:

- R [Ω/m]: Resistência série dos condutores (perdas ôhmicas por efeito pelicular);
- L [H/m]: Indutância série dos condutores (energia magnética armazenada);
- G [S/m]: Condutância paralelo do dielétrico (corrente de fuga e perdas dielétricas);
- C [F/m]: Capacitância paralelo entre condutores (energia eletrostática).

Dedução das Equações dos Telegrafistas no Domínio do Tempo

Aplicando as leis de Kirchhoff na célula elementar Δz:

Malha de Tensão (LKT)

$$v(z,t) - R\Delta z\, i(z,t) - L\Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - v(z+\Delta z,t) = 0$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(z+\Delta z,t) - v(z,t)}{\Delta z} \implies \boxed{\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -R\, i(z,t) - L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}}$$

Nó de Corrente (LKC)

$$i(z,t) - G\Delta z\, v(z+\Delta z,t) - C\Delta z \frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{i(z+\Delta z,t) - i(z,t)}{\Delta z} \implies \boxed{\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G\, v(z,t) - C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}}$$

Formulação Fasorial ($e^{j\omega t}$)

Adotando fasores escalares ($\dot{V}(z)$ e $\dot{I}(z)$):

Equações dos Telegrafistas

$$\frac{d\dot{V}(z)}{dz} = -Z'\,\dot{I}(z)$$

$$\frac{d\dot{I}(z)}{dz} = -Y'\,\dot{V}(z)$$

onde:

$$Z' = R + j\omega L \quad [\Omega/\text{m}]$$

$$Y' = G + j\omega C \quad [\text{S/m}]$$

Equações de Onda Fasoriais

$$\frac{d^2\dot{V}(z)}{dz^2} - \gamma^2\dot{V}(z) = 0$$

$$\frac{d^2\dot{I}(z)}{dz^2} - \gamma^2\dot{I}(z) = 0$$

com a constante de propagação:

$$\gamma = \sqrt{Z'Y'} = \alpha + j\beta$$

$$\alpha \geq 0 \text{ [Np/m]}, \quad \beta \geq 0 \text{ [rad/m]}$$

Constante de Propagação e Impedância Característica

A solução geral desacoplada expressa a superposição de ondas progressivas e regressivas:

Solução Geral no Espaço Fasorial

$$\dot{V}(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z}, \qquad \dot{I}(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$$

Impedância Característica (Z_0)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega]$$

Razão entre a onda de tensão progressiva e a correspondente corrente progressiva.

Constante de Propagação (γ)

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

- α: atenuação (1 Np = 8,686 dB);
- β: fase ($\lambda = 2\pi/\beta$).

A Linha de Transmissão Sem Perdas ($R = 0, G = 0$)

Em altas frequências, $R \ll \omega L$ e $G \ll \omega C$. No limite sem perdas:

Parâmetros Sem Perdas

- $\alpha = 0$ (propagação sem atenuação);
- $\beta = \omega\sqrt{LC}$;
- $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \in \mathbb{R}^+$ (resistivo);
- Velocidade de fase e comprimento:

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

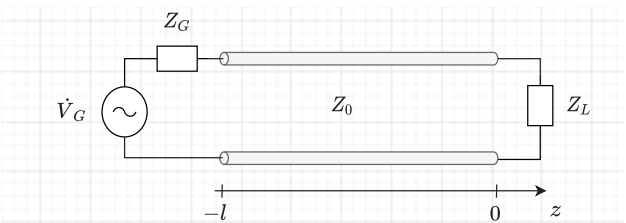
$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{2\pi}{\beta}$$

Condição de Heaviside ($RC = LG$)

Descoberta por **Oliver Heaviside** (1887):

- $\gamma = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}$;
- $\alpha = \sqrt{RG}$ = constante;
- $v_p = 1/\sqrt{LC}$ = constante;
- **Dispersão nula**: sinais propagam-se sem distorção morfológica!

Coeficiente de Reflexão na Carga (Γ_L)



Linha terminada em carga arbitrária Z_L.

Na terminação da linha ($z = 0$, na carga):

$$\dot{V}_L = V_0^+ + V_0^-, \quad \dot{I}_L = \frac{V_0^+ - V_0^-}{Z_0}$$

Como $\dot{V}_L = Z_L \dot{I}_L$:

Coeficiente de Reflexão (Γ_L)

$$\Gamma_L = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma_L| e^{j\theta_L}$$

- Linha Casada ($Z_L = Z_0$): $\Gamma_L = 0$;
- Curto-Circuito ($Z_L = 0$): $\Gamma_L = -1$;
- Circuito Aberto ($Z_L \to \infty$): $\Gamma_L = +1$.

Onda Estacionária, TOE (VSWR) e Perda de Retorno

A interferência mútua gera o padrão de onda estacionária:

Taxa de Onda Estacionária (TOE)

$$\text{TOE} = \frac{|\dot{V}|_{\max}}{|\dot{V}|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}$$

- Sigla em inglês: **VSWR**;
- Faixa: $1 \leq \text{TOE} < \infty$;
- Linha casada: $\text{TOE} = 1$ (ideal);
- Descasamento total: $\text{TOE} \to \infty$.

Perda de Retorno (RL_{dB})

$$RL = -20 \log_{10} |\Gamma_L| \quad [\text{dB}]$$

- Casamento ideal: $RL \to \infty$ dB;
- Reflexão total: $RL = 0$ dB;
- Padrão industrial de RF:
  $RL \geq 14$ dB $\iff$ TOE $\leq 1{,}5$

Equação de Transformação de Impedância de Entrada $Z_{\text{in}}(\ell)$

A impedância observada olhando-se para a linha a uma distância ℓ da carga é:

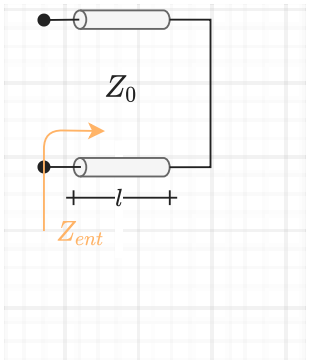
Fórmula de Entrada (Linha Sem Perdas)

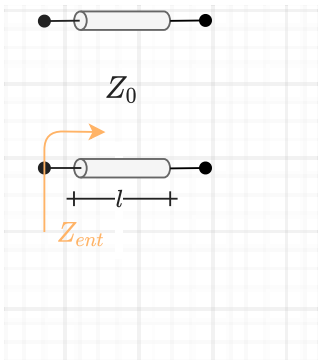
$$\boxed{Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan(\beta\ell)}{Z_0 + jZ_L \tan(\beta\ell)}}$$

- Periódica com período espacial de **meia onda** ($\ell = \lambda/2$);
- Para linhas com perdas ($\gamma = \alpha + j\beta$):

$$Z_{\text{in}}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh(\gamma\ell)}{Z_0 + Z_L \tanh(\gamma\ell)}$$

Terminações Notáveis: Curto-Circuito e Circuito Aberto





Curto-Circuito ($Z_L = 0$)

$$Z_{\text{in}}^{\text{cc}}(\ell) = jZ_0 \tan(\beta\ell)$$

- $0 < \ell < \lambda/4$: indutivo ($X > 0$);
- $\ell = \lambda/4$: aberto ($Z_{\text{in}} \to \infty$);
- $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$: capacitivo ($X < 0$);
- $\ell = \lambda/2$: repete curto ($Z_{\text{in}} = 0$).

Circuito Aberto ($Z_L \to \infty$)

$$Z_{\text{in}}^{\text{ca}}(\ell) = -jZ_0 \cot(\beta\ell)$$

- $0 < \ell < \lambda/4$: capacitivo ($X < 0$);
- $\ell = \lambda/4$: curto ($Z_{\text{in}} = 0$);
- $\lambda/4 < \ell < \lambda/2$: indutivo ($X > 0$);
- $\ell = \lambda/2$: repete aberto.

O Transformador de Quarto de Onda ($\ell = \lambda/4$)

Para um comprimento elétrico $\ell = \lambda/4$ ($\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$), $\tan(\beta\ell) \to \infty$:

Equação do Transformador $\lambda/4$

$$\lim_{\beta\ell \to \pi/2} Z_{\text{in}}(\ell) = \boxed{\frac{Z_0^2}{Z_L}}$$

Aplicações em Casamento de RF:

- Para casar uma linha Z_1 com uma carga real R_L:

$$Z_0 = \sqrt{Z_1 R_L}$$

- Inversor de impedância: carga resistiva baixa vira alta e vice-versa.

Repetidor de Meia Onda ($\ell = \lambda/2$)

Para $\ell = \lambda/2 \implies \beta\ell = \pi$:

$$\tan(\pi) = 0 \implies \boxed{Z_{\text{in}}(\lambda/2) = Z_L}$$

A carga é replicada na entrada independente do valor de Z_0!

Determinação das Ondas: Método Matricial 2×2

A determinação de V_0^+ e V_0^- em uma linha com carga em $z = 0$ e gerador em $z = -d$ resolve-se por um sistema linear algébrico direto:

Condições nos Terminais:

1. Na carga ($z = 0$):

$$\Gamma_L V_0^+ - V_0^- = 0$$

2. Na entrada ($z = -d$):

$$V_0^+ e^{j\beta d} + V_0^- e^{-j\beta d} = \dot{V}(-d)$$

Sistema Linear Matricial 2×2

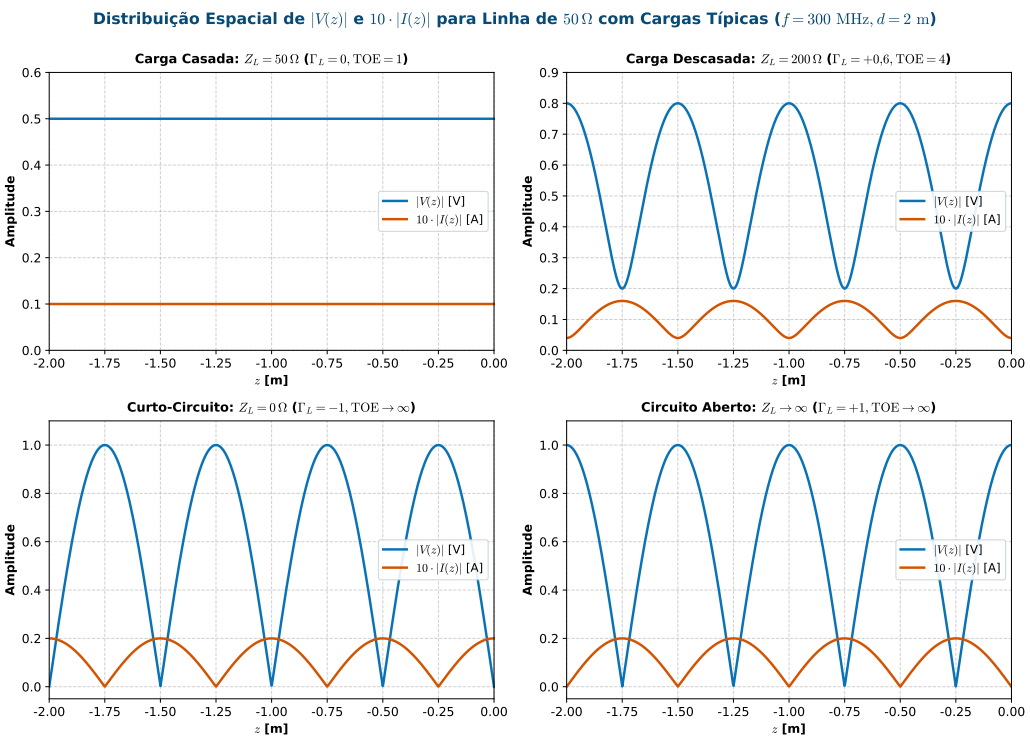
$$\begin{bmatrix} \Gamma_L & -1 \\ e^{j\beta d} & e^{-j\beta d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^+ \\ V_0^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{V}(-d) \end{bmatrix}$$

Vantagem Pedagógica e Numérica:

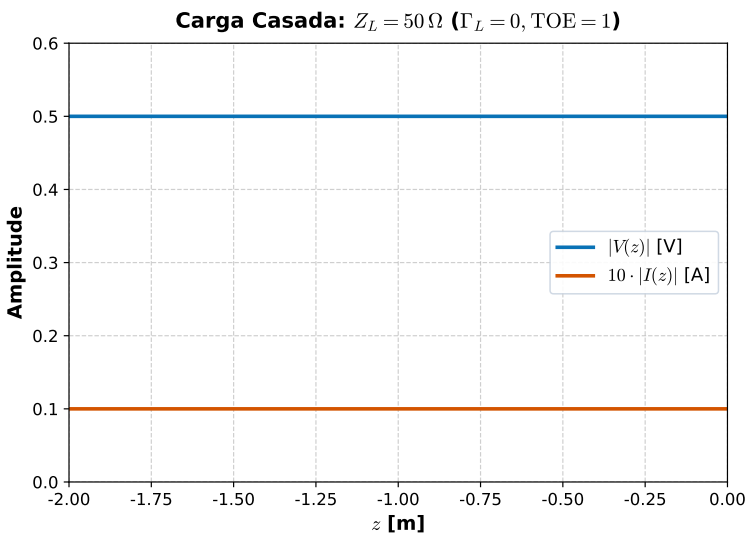
- Conexão direta com Álgebra Linear;
- Solução analítica por determinante ou via `linalg.solve`.

Simulação Numérica: Linha de $50\,\Omega$ com Cargas Típicas

Condições da Simulação: $Z_0 = 50\,\Omega$, $Z_g = 50\,\Omega$, $V_g = 1\,\text{V}$, $f = 300\,\text{MHz}$ ($\lambda = 1\,\text{m}$), $d = 2\,\text{m} = 2\lambda$.



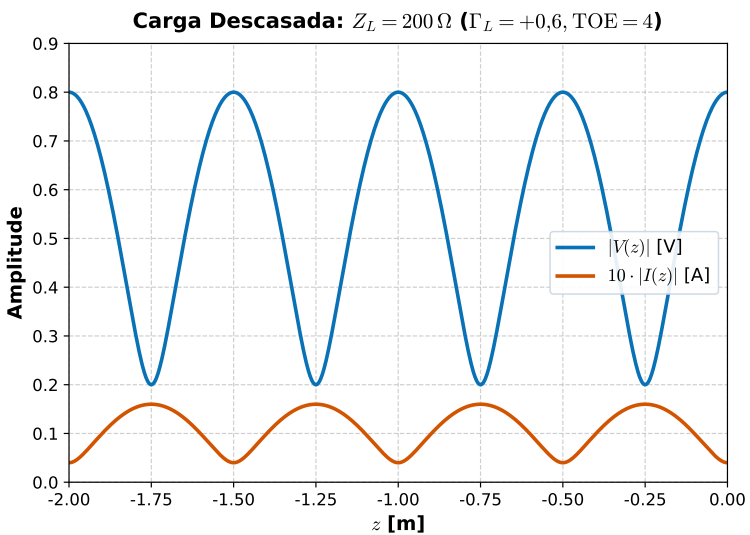
Simulação Numérica: Linha Casada ($Z_L = 50\,\Omega$)



Carga Casada

- $\Gamma_L = \frac{50-50}{50+50} = 0$;
- TOE $= 1{,}0$ (ideal);
- $V_0^+ = 0{,}5\,\text{V}$, $V_0^- = 0$;
- $|V(z)| = 0{,}5\,\text{V}$ (constante);
- $|I(z)| = 10\,\text{mA}$ (constante);
- **Sem reflexão:** onda puramente progressiva ao longo de toda a linha.

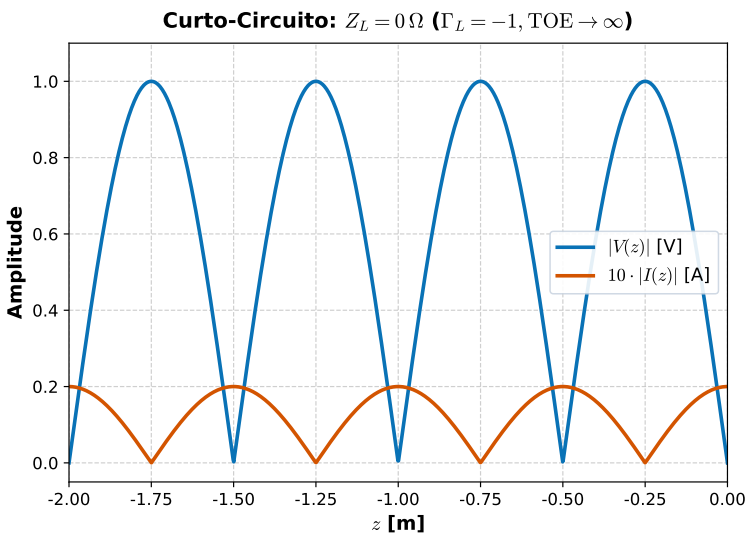
Simulação Numérica: Carga Descasada ($Z_L = 200\,\Omega$)



Carga $Z_L = 200\,\Omega$

- $\Gamma_L = \frac{200-50}{200+50} = +0{,}60$;
- $\mathrm{TOE} = \frac{1+0{,}6}{1-0{,}6} = 4{,}0$;
- $|V|_{\max} = 0{,}8\,\mathrm{V}$ (em $z = 0$);
- $|V|_{\min} = 0{,}2\,\mathrm{V}$ ($\lambda/4$ da carga);
- Padrão estacionário parcial: envoltória oscila com período espacial $\lambda/2 = 0{,}5\,\mathrm{m}$.

Simulação Numérica: Terminação em Curto-Circuito ($Z_L = 0\,\Omega$)



Curto-Circuito

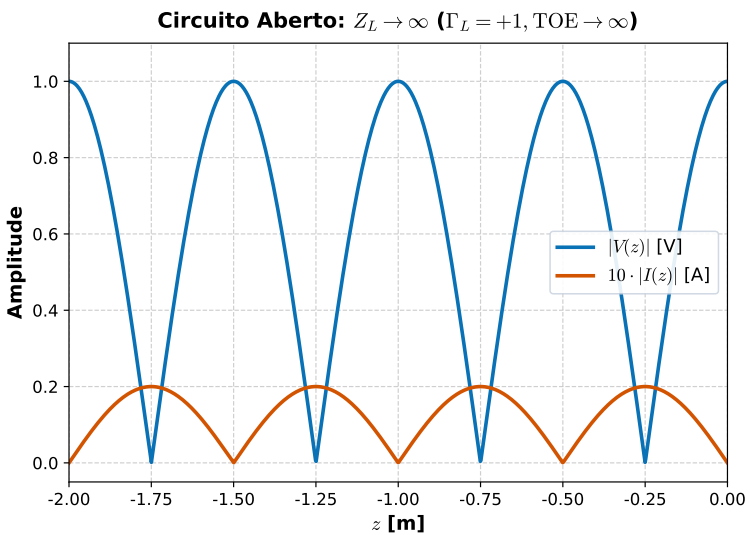
- $\Gamma_L = -1$; TOE $\to \infty$;
- Na terminação ($z = 0$):

$$|V(0)| = 0\,\text{V} \text{ (nó)}$$

$$|I(0)| = |I|_{\max} \text{ (máx)}$$

- Nós de tensão em $k\lambda/2$;
- Reflexão total: potência ativa nula à carga.

Simulação Numérica: Terminação em Circuito Aberto ($Z_L \to \infty$)



Circuito Aberto

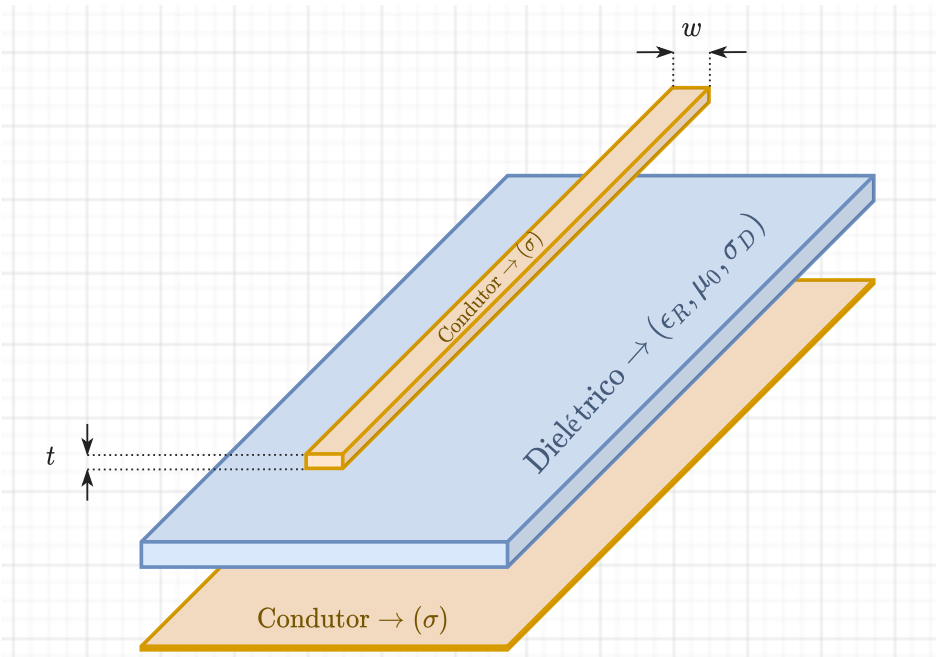
- $\Gamma_L = +1$; TOE $\to \infty$;
- Na terminação ($z = 0$):

$$|V(0)| = |V|_{\max} \text{ (máx)}$$

$$|I(0)| = 0\,\text{A} \text{ (nó)}$$

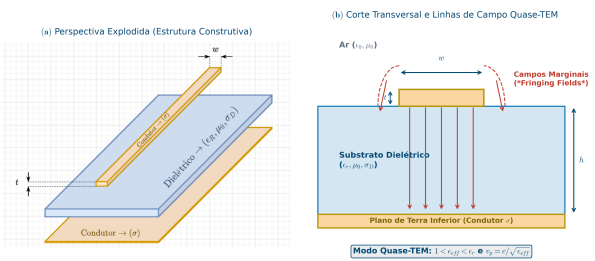
- Padrão dual ao curto ($\Delta z = \lambda/4$);
- Onda puramente estacionária.

A Linha de Microfita (*Microstrip*): Topologia Planar



- **Trilha Superior:** Condutor metálico de largura w e espessura fina t;
- **Substrato Dielétrico:** Espessura uniforme h e permissividade relativa ϵ_r (ex: FR-4, Rogers, Alumina);
- **Plano de Terra Inferior:** Metalização contínua na base inferior.

O Modo Quase-TEM e a Permissividade Efetiva (ϵ_{eff})



Seção transversal com campos de borda.

Por que o modo é Quase-TEM?

- Dielétrico não envolve totalmente o condutor: ar (ϵ_0) acima e substrato (ϵ_r) abaixo;
- Velocidades de fase diferem na interface;
- Para $h \ll \lambda$, componentes longitudinais E_z, H_z são mínimas $\implies$ **Quasi-TEM**.

Permissividade Efetiva

$$1 < \epsilon_{\text{eff}} < \epsilon_r, \qquad v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}}$$

Equações Analíticas de Análise (Wheeler / Pozar)

Dado (w, h, ϵ_r), determinar ϵ_{eff} e a impedância característica Z_0:

Permissividade Efetiva (ϵ_{eff})

$$\boxed{\epsilon_{\text{eff}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12\frac{h}{w}}}}$$

Impedância Característica Z_0 (Dois Ramos)

$$Z_0 = \begin{cases} \dfrac{60}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} \ln\left(\dfrac{8h}{w} + \dfrac{w}{4h}\right), & \text{para } \dfrac{w}{h} \leq 1 \\ \dfrac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}\left[\dfrac{w}{h} + 1{,}393 + 0{,}667 \ln\left(\dfrac{w}{h} + 1{,}444\right)\right]}, & \text{para } \dfrac{w}{h} > 1 \end{cases}$$

Equações Analíticas de Síntese (Projeto de Microfita)

Dado (Z_0, h, ϵ_r), calcular a razão de aspecto w/h e a largura física w:

Ramo 1: Linhas Estreitas ($w/h \leq 2$)

$$\frac{w}{h} = \frac{8e^A}{e^{2A} - 2}$$

onde:

$$A = \frac{Z_0}{60}\sqrt{\frac{\epsilon_r + 1}{2}} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1}\left(0{,}23 + \frac{0{,}11}{\epsilon_r}\right)$$

Ramo 2: Linhas Largas ($w/h > 2$)

$$\frac{w}{h} = \frac{2}{\pi}\left[B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\epsilon_r - 1}{2\epsilon_r}\left\{\ln(B - 1) + 0{,}39 - \frac{0{,}61}{\epsilon_r}\right\}\right]$$

onde:

$$B = \frac{377\pi}{2Z_0\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{60\pi^2}{Z_0\sqrt{\epsilon_r}}$$

Exemplo Numérico de Projeto: Linha de $50\,\Omega$ em FR-4

Especificação: Projetar linha de $Z_0 = 50\,\Omega$ em substrato FR-4 com $\epsilon_r = 4{,}4$ e $h = 1{,}6$ mm.

1. **Cálculo do Coeficiente A:**

$$A = \frac{50}{60}\sqrt{\frac{5{,}4}{2}} + \frac{3{,}4}{5{,}4}\left(0{,}23 + \frac{0{,}11}{4{,}4}\right) \approx 1{,}369 + 0{,}161 = \mathbf{1{,}530}$$

2. **Avaliação pelo Ramo 1 ($w/h \leq 2$):**

$$\frac{w}{h} = \frac{8e^{1{,}530}}{e^{3{,}060} - 2} = \frac{8 \times 4{,}618}{21{,}328 - 2} \approx \mathbf{1{,}912} \quad (\leq 2 \implies \text{válido!})$$

3. **Largura Física da Trilha (w):**

$$w = 1{,}912 \times h = 1{,}912 \times 1{,}6 \text{ mm} \approx \mathbf{3{,}06} \text{ mm}$$

4. **Permissividade Efetiva e Velocidade de Fase:**

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{5{,}4}{2} + \frac{3{,}4}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + 12(1{,}6/3{,}06)}} \approx \mathbf{3{,}33}$$

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{3{,}33}} \approx \mathbf{1{,}64 \times 10^8} \text{ m/s}$$

Perdas e Limitações de Frequência em Microfita

A atenuação total da linha de microfita é a soma das perdas no dielétrico e no condutor:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c \quad [\text{Np/m}]$$

Perdas no Dielétrico (α_d)

$$\alpha_d = \frac{k_0 \epsilon_r (\epsilon_{\text{eff}} - 1) \tan\delta}{2\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}(\epsilon_r - 1)}$$

onde $\tan\delta$ é a tangente de perdas (ex.: $\tan\delta \approx 0{,}02$ no FR-4; $\approx 0{,}002$ no Rogers).

Perdas Ôhmicas / Condução (α_c)

$$\alpha_c \approx \frac{R_s}{Z_0 w} = \frac{\sqrt{\pi f \mu/\sigma}}{Z_0 w}$$

onde R_s é a resistência superficial do cobre devida ao **efeito pelicular** (*skin effect*).

Limite de Alta Frequência: Para suprimir ondas de superfície e modos superiores, projeta-se $h < 0{,}1\lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$.

Phillip Hagar Smith (1905–1987)



Phillip H. Smith (Bell Labs, 1939).

"Desde a época em que comecei a calcular linhas de transmissão com réguas de cálculo, procurei uma representação gráfica que eliminasse as tediosas repetições com funções hiperbólicas complexas."

- Engenheiro pioneiro da RCA e Bell Telephone Laboratories;
- Criou em 1939 a mais famosa e duradoura ferramenta gráfica da engenharia de RF e micro-ondas: a **Carta de Smith**;
- Desenvolvida independentemente no Japão por Tosaku Mizuhashi em 1937.

A Transformação Conforme Bilinear e o Plano Γ

Seja a impedância normalizada $z = Z/Z_0 = r + jx$. A relação fundamental com o coeficiente de reflexão complexo $\Gamma = u + jv$ é dada pelo **mapeamento bilinear de Möbius**:

$$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} \iff z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

O Plano de Reflexão $\Gamma = u + jv$

- $\Gamma = |\Gamma| e^{j\theta} = u + jv$;
- Cargas passivas ($r \geq 0$) mapeiam-se **dentro** do disco unitário $|\Gamma| \leq 1$;
- Converte o semiplano infinito $r \geq 0$ em uma região circular compacta.

Propriedades de Mapeamento Conforme

- **Preservação de Ângulos:** Ortogonalidade no plano z é mantida no plano Γ;
- Retas de r e x constantes transformam-se em **círculos ortogonais**;
- Elimina operações exaustivas com funções hiperbólicas complexas.

Dedução das Famílias Geométricas (r e x)

Substituindo $\Gamma = u + jv$ em $z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$ e racionalizando pelo conjugado:

$$r + jx = \frac{(1-u^2-v^2)+j2v}{(1-u)^2+v^2} \implies r = \frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}, \quad x = \frac{2v}{(1-u)^2+v^2}$$

Círculos de Resistência r Constante

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2$$

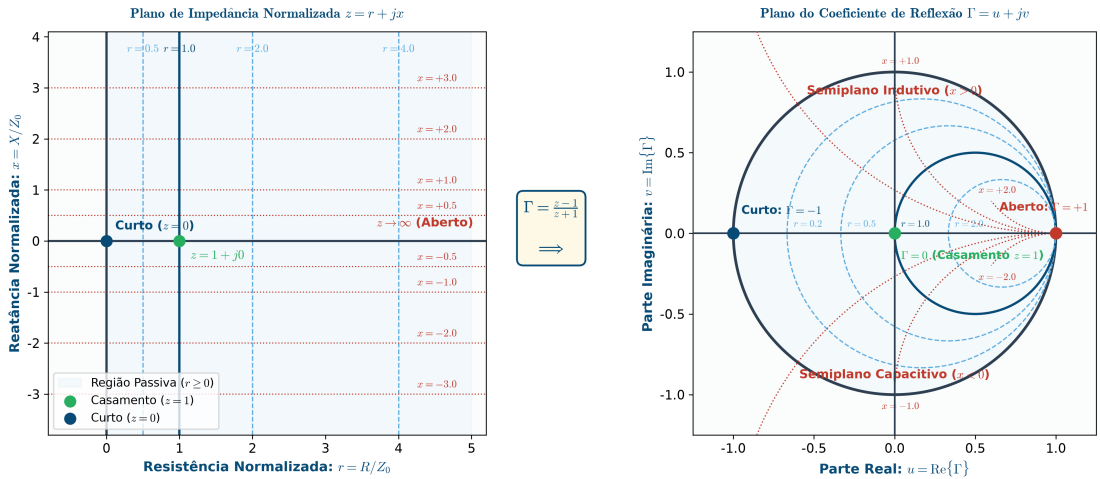
- Centro: $\left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$ no eixo real;
- Raio: $R_r = \frac{1}{1+r}$;
- Passam por $(1, 0)$ (circuito aberto).

Arcos de Reatância x Constante

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

- Centro: $\left(1, \frac{1}{x}\right)$ na reta $u = 1$;
- Raio: $R_x = \frac{1}{|x|}$;
- $x > 0$: indutivo (superior);
- $x < 0$: capacitivo (inferior).

Mapeamento Conforme: Do Plano z ao Plano Γ



Princípio da Compactação Conforme de Möbius

A transformação $\Gamma = \frac{z-1}{z+1}$ mapeia todo o semiplano passivo $r \geq 0$ no disco unitário $|\Gamma| \leq 1$, preservando a ortogonalidade das famílias de curvas circulares.

Topologia, Regiões e Pontos Notáveis da Carta

Pontos Singulares da Carta

- **Centro** $(0, 0)$**:** Casamento ideal ($z = 1 \iff Z = Z_0$, $\Gamma = 0$, TOE $= 1$);
- **Extremo Esquerdo** $(-1, 0)$**:** Curto-circuito ($z = 0$, $\Gamma = -1$);
- **Extremo Direito** $(+1, 0)$**:** Circuito aberto ($z \to \infty$, $\Gamma = +1$).

Regiões e Fronteiras Físicas

- **Borda Unitária** ($|\Gamma| = 1$)**:** Reativo puro ($r = 0$, sem dissipação);
- **Eixo Horizontal Central** ($v = 0$)**:** Cargas puramente resistivas ($x = 0$);
- **Semiplano Superior** ($v > 0$)**:** Reatância indutiva ($x > 0$);
- **Semiplano Inferior** ($v < 0$)**:** Reatância capacitiva ($x < 0$).

Dinâmica de Linhas: Rotação e Círculos de TOE

Ao longo de uma linha de transmissão sem perdas, a reflexão varia com a posição ℓ:

$$\Gamma(\ell) = \Gamma_L e^{-j2\beta\ell} = |\Gamma_L| e^{j(\theta_L - 2\beta\ell)}$$

Regra de Rotação Espacial:

- Afastando-se da carga para o gerador (ℓ cresce), a fase decresce à taxa de $2\beta\ell$;
- Rotação no **sentido horário** (*Toward Generator*);
- Uma volta completa (360°) $\iff$ $\ell = \lambda/2$ (meia onda!).

Círculos de TOE Constante

- Em linha sem perdas, $|\Gamma|$ = constante descreve um **círculo concêntrico**;
- **Leitura direta da TOE:** No intercepto com o eixo real à direita ($u > 0, v = 0$):

$$r_{\max} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \text{TOE}$$

A Carta de Admitâncias (Y) e Inversão por $\lambda/4$

Para elementos em paralelo (*stubs*), somam-se admitâncias normalizadas $y = Y/Y_0 = g + jb$:

Relação Conforme em Admitância

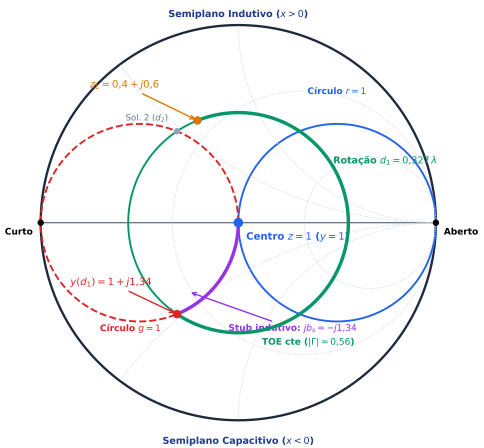
$$y = \frac{1}{z} \implies \Gamma_y = -\Gamma_z = \Gamma_z e^{\pm j\pi}$$

- Transição $z \leftrightarrow y \iff$ **rotação de** 180° **(**$\lambda/4$**)**;
- Linha de $\lambda/4$ atua como inversor de impedância ($z_{\text{in}} = 1/z_L$).

Curvas de Admitância (g e b)

- **Círculos de Condutância** g**:** Tangentes a $(-1, 0)$ (curto-circuito);
- **Círculo** $g = 1$**:** Passa pelo centro; alvo para casamento paralelo;
- **Susceptâncias** b **na Carta:**
  - $+jb$ $(b > 0)$: capacitivo (semiplano inferior);
  - $-jb$ $(b < 0)$: indutivo (semiplano superior).

Casamento de Impedâncias e Sintonia por *Stub*



Trajetória de casamento por *stub* simples paralelo.

Técnica do *Stub* Simples Paralelo:

1. **Locação da Carga z_L:** Plota-se z_L e traça-se o círculo concêntrico de $|\Gamma|$ (TOE constante);
2. **Deslocamento pela Linha (d):** Gira-se no sentido horário até interceptar o círculo $g = 1$ ($y(d_1) = 1 + j1{,}34$);
3. **Anulação de Susceptância (b_{stub}):** Conecta-se em paralelo um trecho (*stub*) indutivo tal que:

$$b_{\text{stub}} = -1{,}34 \implies y_{\text{total}} = 1 + j0$$

Resultado: Carga casada no centro ($Z_{\text{in}} = Z_0$) sem componentes discretos!

Obras Clássicas e Bibliografia Canônica



Literatura de referência em RF e micro-ondas.

Obras Fundamentais Recomendadas:

1. **Pozar, D. M.** *Microwave Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, 2011. (Capítulo 2: Teoria de Linhas; Capítulo 3: Microstrip).
2. **Cheng, D. K.** *Field and Wave Electromagnetics*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1989. (Capítulo 9: Transmission Lines).
3. **Edwards, T. C. & Steer, M. B.** *Foundations for Microstrip Circuit Design*, 4th ed., Wiley-IEEE Press, 2016.
4. **Balanis, C. A.** *Advanced Engineering Electromagnetics*, 2nd ed., Wiley, 2012.
5. **Smith, P. H.** "Transmission line calculator", *Electronics*, vol. 12, pp. 29–31, 1939.