UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

[MOD-MTL] Análise de Linhas de Transmissão com Multicondutores

Modelagem de Clayton Paul no Tempo e Frequência, Microfita Tripla (Fig. 5.32) e Batimento Direcional

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-Foton





Sumário do Módulo [MOD-MTL] — Material Bônus

1. Fundamentação Teórica de Linhas Multicondutoras (MTL)
2. Dimensionamento da Microfita Tripla (Figura 5.32 de Clayton Paul)
3. Análise Eletromagnética Modal 2D na Seção Transversal
4. Propagação Temporal de Pulso e Batimento Direcional
5. Estudo MTL em 60 Hz: Linhas de Distribuição Aérea (13.8 kV)
6. Conclusões e Síntese de Engenharia

Equações do Telegrafista no Domínio do Tempo

Para um sistema uniforme com n condutores ativos paralelos ao eixo z e um condutor de terra (0):

Equações do Telegrafista Matriciais (Clayton Paul)

$$\frac{\partial \mathbf{v}(z,t)}{\partial z} = -\mathbf{R}\,\mathbf{i}(z,t) - \mathbf{L}\,\frac{\partial \mathbf{i}(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}(z,t)}{\partial z} = -\mathbf{G}\,\mathbf{v}(z,t) - \mathbf{C}\,\frac{\partial \mathbf{v}(z,t)}{\partial t}$$

- $\mathbf{v}(z,t) = [v_1, \ldots, v_n]^T$: tensões nodais em relação ao terra comum;
- $\mathbf{i}(z,t) = [i_1, \ldots, i_n]^T$: correntes longitudinais de condução;
- $[\mathbf{R}], [\mathbf{L}], [\mathbf{G}], [\mathbf{C}]$: matrizes simétricas $n \times n$ de parâmetros distribuídos por unidade de comprimento (*per-unit-length*).

Formulação Fasorial e Equações de Onda Matriciais

No domínio da frequência angular $\omega = 2\pi f$ ($\mathbf{V}(z)e^{j\omega t}$, $\mathbf{I}(z)e^{j\omega t}$):

$$\frac{d\mathbf{V}(z)}{dz} = -\mathbf{Z}\,\mathbf{I}(z), \quad \frac{d\mathbf{I}(z)}{dz} = -\mathbf{Y}\,\mathbf{V}(z)$$

com $\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C}$.

Equações de Onda Desacopladas de Segunda Ordem

$$\frac{d^2\mathbf{V}(z)}{dz^2} = \mathbf{ZY}\,\mathbf{V}(z), \quad \frac{d^2\mathbf{I}(z)}{dz^2} = \mathbf{YZ}\,\mathbf{I}(z)$$

- Em dielétricos estratificados (microfita), $\mathbf{LC} \neq \mu\varepsilon\mathbf{I}$;
- Os produtos $\mathbf{ZY}$ e $\mathbf{YZ}$ não são escalares da identidade;
- Ondas propagam-se em modos quasi-TEM com **velocidades distintas**.

Desacoplamento Modal e Transformações de Autovetores

Transformações lineares para coordenadas modais descorrelacionadas:

$$\mathbf{V}(z) = \mathbf{T}_V\,\mathbf{V}_m(z), \quad \mathbf{I}(z) = \mathbf{T}_I\,\mathbf{I}_m(z)$$

onde $\mathbf{T}_V$ diagonaliza $\mathbf{ZY}$ e $\mathbf{T}_I$ diagonaliza $\mathbf{YZ}$ ($\mathbf{T}_I^T = \mathbf{T}_V^{-1}$):

Autovalores e Velocidades de Fase Modais

$$\mathbf{T}_V^{-1}(\mathbf{ZY})\mathbf{T}_V = \mathrm{diag}(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \ldots, \gamma_n^2)$$

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m(\mathbf{LC})}}, \quad \beta_m = \omega\sqrt{\lambda_m(\mathbf{LC})}$$

A dispersão modal induz distorção de pulso e diafonia no extremo distante (*Far-End Crosstalk* — FEXT).

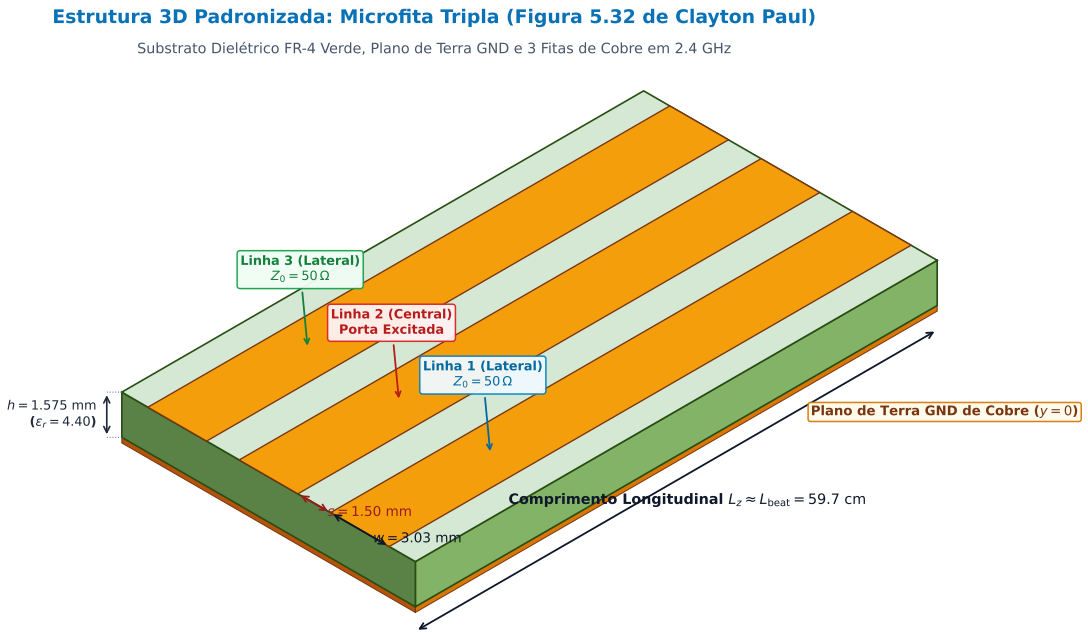
Geometria Canônica da Figura 5.32 em 2.4 GHz

Três fitas coplanares simétricas sobre substrato FR-4 com terra inferior:

Parâmetro Físico	**Símbolo**	**Valor Numérico de Projeto**
Frequência de Operação	f_0	2.40 GHz ($\lambda_0 = 125.0$ mm)
Permissividade Relativa	ε_r	4.40 (FR-4 padrão de micro-ondas)
Espessura do Substrato	h	1.575 mm (62.0 mils)
Largura de Cada Fita	w	3.03 mm ($w/h = 1.924 \implies Z_{0,\text{iso}} = 50.0\,\Omega$)
Espaçamento entre Bordas	s	1.50 mm ($s/h = 0.952$, acoplamento forte)
Comprimento de Batimento	L_{beat}	596.6 mm (≈ 59.7 cm)

- Cada linha isolada possui exatamente $Z_0 = 50\,\Omega$ conforme especificação;
- O espaçamento $s = 1.5$ mm estabelece acoplamento mútuo balanceado.

Topologia Tridimensional Padronizada (LabTel / IN-Foton)



Microfita tripla: substrato FR-4 ($\varepsilon_r = 4.40, h = 1.575$ mm), fitas de cobre ($w = 3.03$ mm, $s = 1.50$ mm) e terra inferior contínuo.

Extração Numérica pelo Método dos Momentos de Clayton Paul

Integração da série infinita de cargas-imagem (Clayton Paul, Seção 5.3.1.2):

$$\phi(d) = \frac{(1+k)q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r,\text{eff},\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} k^{n-1} \ln\left(\frac{d^2 + (2nh)^2}{d^2}\right)$$

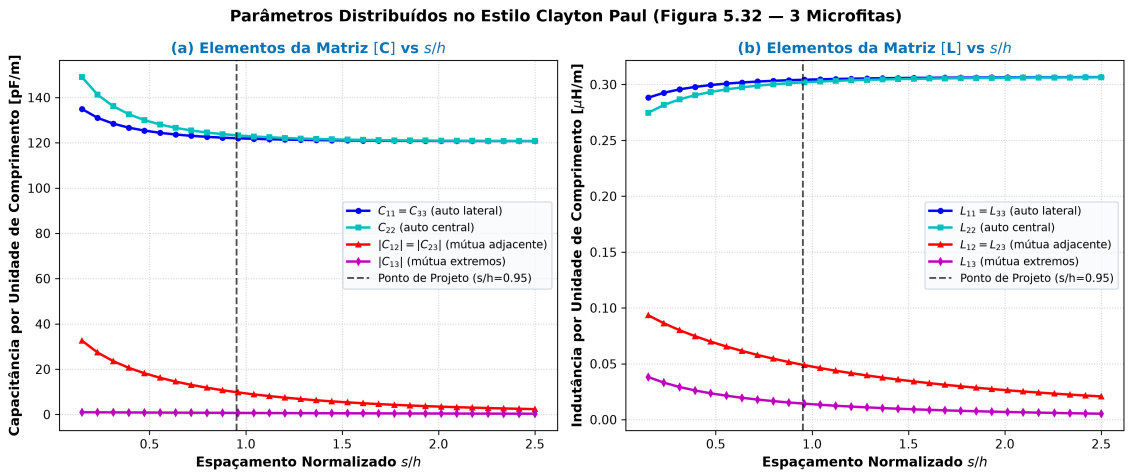
com $k = (\varepsilon_r - 1)/(\varepsilon_r + 1)$ e núcleo fechado $F(u, a)$.

Matrizes Numéricas Extraídas (UFES / LabTel)

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 122.46 & -9.97 & -0.70 \\ -9.97 & 123.80 & -9.97 \\ -0.70 & -9.97 & 122.46 \end{bmatrix} \quad [\text{pF/m}]$$

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} 0.3033 & 0.0492 & 0.0145 \\ 0.0492 & 0.3009 & 0.0492 \\ 0.0145 & 0.0492 & 0.3033 \end{bmatrix} \quad [\mu\text{H/m}]$$

Curvas Paramétricas no Estilo Clayton Paul



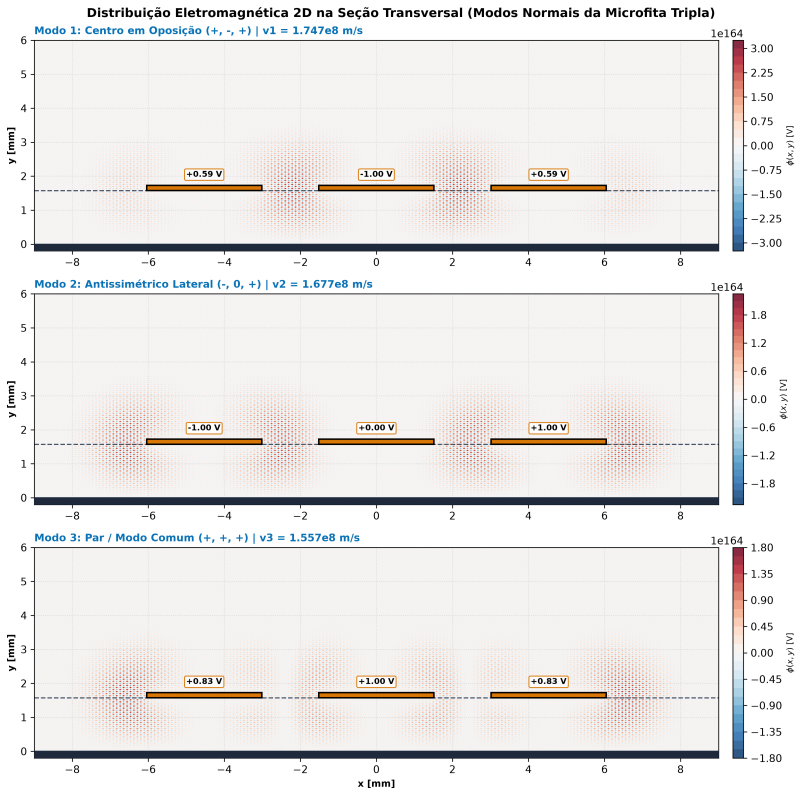
Variação dos elementos [**C**] e [**L**] em função de s/h reproduzindo o padrão visual do livro.

Os Três Modos Próprios Normais da Microfita Tripla

A estrutura simétrica suporta três modos próprios normais ortogonais:

1. **Modo 1 (Centro em Oposição):** $\mathbf{v}_{m1} = [+0.59, -1.00, +0.59]^T$
   Linha central em antifase com as laterais; $v_1 = 1.748 \times 10^8$ m/s, $\varepsilon_{\text{eff},1} = 2.943$.
2. **Modo 2 (Antissimétrico Lateral):** $\mathbf{v}_{m2} = [-1.00, 0.00, +1.00]^T$
   Laterais em antifase e linha central nula; $v_2 = 1.677 \times 10^8$ m/s, $\varepsilon_{\text{eff},2} = 3.197$.
3. **Modo 3 (Par / Modo Comum):** $\mathbf{v}_{m3} = [+0.83, +1.00, +0.83]^T$
   Todos os condutores em fase; $v_3 = 1.557 \times 10^8$ m/s, $\varepsilon_{\text{eff},3} = 3.705$.

Distribuição de Campo Elétrico 2D e Potenciais



Potencial $\phi(x, y)$ e vetores de campo $\vec{E}(x, y)$ resolvidos por diferenças finitas.

Dinâmica de Acoplamento e Batimento Espacial

Ao excitar a Linha 2 (central) com $\mathbf{v}(0) = [0, 1, 0]^T$:

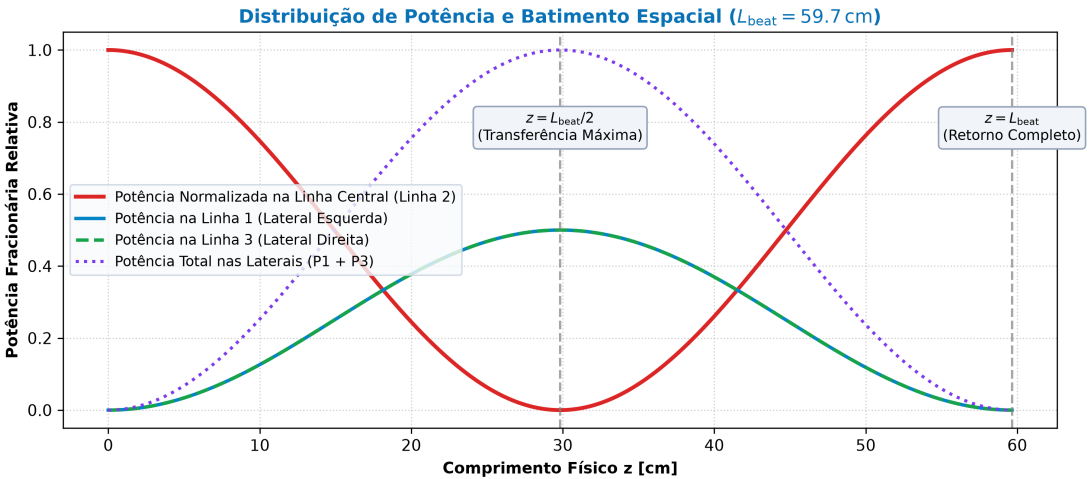
- O sinal excita exclusivamente os **Modos 1 e 3** (o Modo 2 é nulo no centro);
- Como $\beta_1 \neq \beta_3$, ocorre interferência progressiva ao longo de z.

Comprimento de Batimento Teórico (L_{beat})

$$L_{\text{beat}} = \frac{2\pi}{|\beta_3 - \beta_1|} = \frac{2\pi}{96.83 - 86.29} = 596.6 \text{ mm} \approx 59.7 \text{ cm}$$

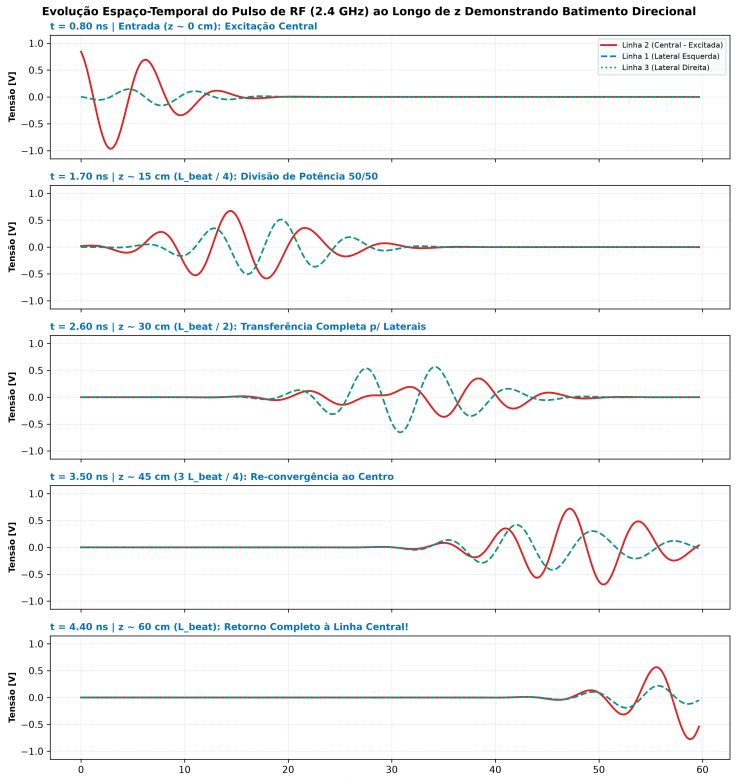
- $z = L_{\text{beat}}/2 \approx 30$ cm: Transferência máxima para as linhas 1 e 3 ($V_2 \approx 0$);
- $z = L_{\text{beat}} \approx 60$ cm: **Retorno completo da energia para a linha central**.

Envoltória de Potência ao Longo do Eixo z



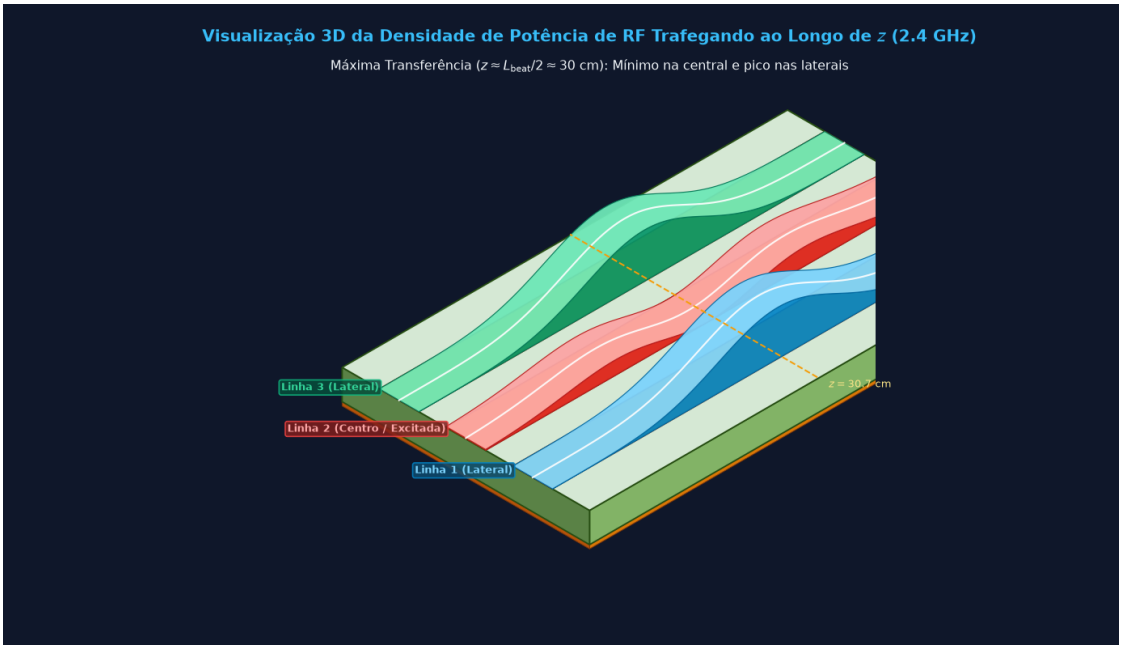
Transferência periódica de potência fracionária demonstrando o ciclo de acoplamento direcional.

Snapshots da Propagação Temporal do Pulso em 2.4 GHz



Perfis espaciais de tensão $V_1(z), V_2(z), V_3(z)$ em 5 instantes ilustrando a reconvergência.

Visualização 3D da Densidade de Potência ao Longo de z



Densidade volumétrica de potência de RF ($|v_i(z,t)|^2$): o pacote injetado na linha central (vermelho) difrata para as linhas adjacentes em $z \approx 30$ cm e retorna ao centro em $z \approx 60$ cm.

Linhas Aéreas de Distribuição (13.8 kV) nos Padrões Brasileiros

Aplicação da teoria MTL de Clayton Paul em sistemas elétricos de potência a 60 Hz:

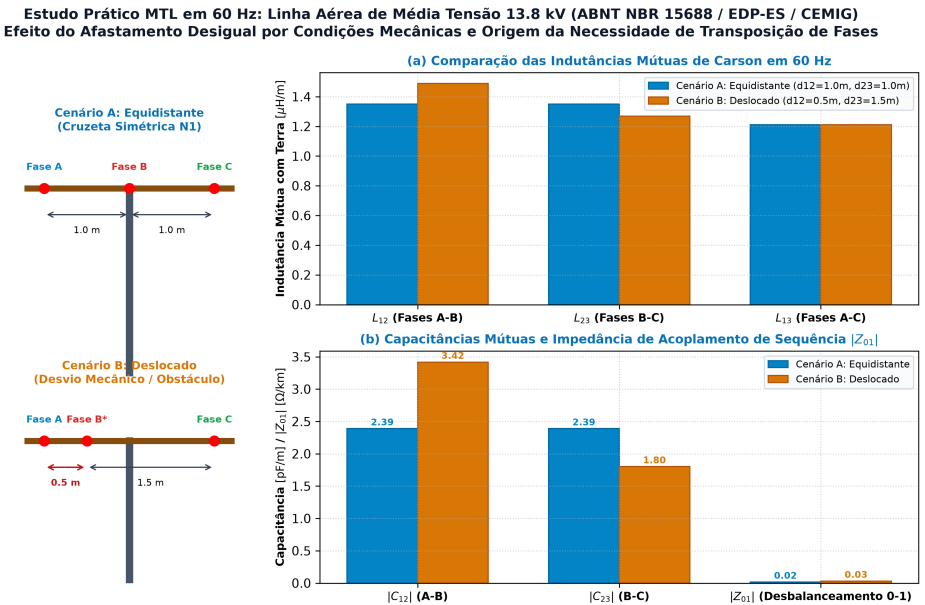
- **Normas Brasileiras:** ABNT NBR 15688 (redes nuas), NBR 14039 (média tensão 13.8 kV) e NBR 7270 (cabos CAA);
- **Condutor:** Cabo CAA 1/0 AWG "Raven" ($r = 5.055$ mm, $r' = 4.47$ mm, $R_{ac} = 0.536\,\Omega/\text{km}$);
- **Altura Média:** $H = 10.0$ m (poste de 11 m / 12 m com vão médio de 40 m).

Retorno de Terra de Carson (Clayton Paul, Seção 4.3)

Para solo brasileiro com $\rho = 100\,\Omega \cdot \text{m}$ em $f = 60$ Hz:

$$D_e = 658.87\sqrt{\frac{\rho}{f}} = 850.6 \text{ m}, \quad \Delta R_e = \pi^2 \times 10^{-7}\omega \approx 0.372\,\Omega/\text{km}$$

Origem Mecânica do Afastamento Desigual (13.8 kV)



Por restrições de faixa, fachadas prediais (NBR 15688), arborização ou montagem de transformadores/chaves, cruzetas assimétricas aproximam o condutor central da fase esquerda (Cenário B).

Matrizes Numéricas [L], [C] e Sequência de Fortescue

Comparação analítica dos parâmetros distribuídos a 60 Hz entre os Cenários A e B:

Parâmetro Eletromagnético	**Cenário A (Equidist.)**	**Cenário B (Desloc.)**	**Impacto Físico**
Afastamento D_{12} vs D_{23}	1.0 m / 1.0 m	0.5 m / 1.5 m	Deslocamento central pela metade
Indutâncias Mútuas L_{12}, L_{23}	1.349 / 1.349 mH/km	**1.488** / **1.268** mH/km	**Assimetria mútua de** 14.77%
Capacitância Mútua $\lvert C_{12}\rvert$	2.390 nF/km	**3.419** nF/km	**Aumento de** +43.06%
Seq. Zero Z_{00}	$1.652 + j1.899\,\Omega$/km	$1.652 + j1.913\,\Omega$/km	Reatância de solo estável
Seq. Positiva Z_{11}	$0.536 + j0.425\,\Omega$/km	$0.536 + j0.418\,\Omega$/km	Reatância série longitudinal estável
Acoplamento Cruzado $\lvert Z_{01}\rvert$	$\mathbf{0.017\,\Omega}$/km	$\mathbf{0.032\,\Omega}$/km	**Quase duplica** (+88.2%)

- A assimetria quebra a simetria cíclica de $[\mathbf{Z}_{abc}]$ e $[\mathbf{Y}_{abc}]$;
- O acoplamento mútuo de sequência induz desequilíbrios sob cargas equilibradas.

Consequências no Sistema e Transposição de Fases

Impactos operacionais do afastamento assimétrico dos condutores:

- **Quedas de Tensão Assimétricas:** As correntes de sequência positiva (I_1) acoplam quedas de tensão de sequência zero e negativa ($V_0, V_2 \neq 0$);
- **Correntes no Neutro e Solo:** Circulação permanente de corrente no condutor neutro e retorno de Carson, elevando perdas Joule no alimentador;
- **Atuação Indevida de Proteção:** Risco de disparo acidental do relé de neutro/terra (função ANSI 51N) em alimentadores longos.

Soluções Normativas da Engenharia

- **Ciclos de Transposição de Fases:** Rotação física dos cabos a cada 1/3 do alimentador para anular os acoplamentos mútuos médios;
- **Redes Compactas Protegidas (NBR 15992):** Uso de espaçadores losangulares com geometria triangular simétrica de 25 cm.

Conclusões e Síntese de Engenharia

A teoria de linhas multicondutoras (Clayton Paul) unifica micro-ondas e sistemas de potência:

1. **Microfita Tripla em 2.4 GHz:**
   - Substrato heterogêneo gera dispersão modal ($\varepsilon_{\text{eff},1} = 2.94, \varepsilon_{\text{eff},2} = 3.20, \varepsilon_{\text{eff},3} = 3.71$);
   - O batimento direcional cíclico permite criar divisores de 3 dB ($L_{\text{beat}}/4$) e acopladores direcionais ($L_{\text{beat}}/2$).
2. **Linhas Aéreas de Distribuição em 60 Hz:**
   - O retorno de terra de Carson ($D_e = 850.6$ m) domina as indutâncias mútuas;
   - O deslocamento mecânico do condutor central aumenta L_{12} em 14.77% e duplica o acoplamento de sequência $|Z_{01}|$, tornando mandatória a transposição de fases ou o uso de redes compactas protegidas (NBR 15992).

Material Bônus Oficial — Cursos de Eletromagnetismo e Engenharia de RF — UFES