UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

[MOD-PH02] Teoria Eletromagnética de Guias Dielétricos e Modos Confinados

Da Reflexão Interna Total à Solução de Modos TE e TM

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-Foton





Sumário do Módulo [MOD-PH02]

1. Definição Eletromagnética de Modo Óptico
2. Modelo de Raios e Deslocamento de Goos-Hänchen
3. Dedução Vetorial: Modos TE e TM
4. Parâmetros Normalizados, Dispersão e Confinamento
5. Plataformas Materiais e Geometrias Típicas
6. Estudo Numérico 2D e Propagação FDTD
7. Conclusões e Referências Bibliográficas

O que é Rigorosamente um Modo Óptico?

Definição Eletromagnética Formal

Um **modo óptico** é uma autofunção espacial das equações de onda de Helmholtz que satisfaz as condições de contorno da estrutura e se propaga ao longo do eixo longitudinal z mantendo seu perfil transversal invariante:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{e}(x, y)\, e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{h}(x, y)\, e^{j(\omega t - \beta z)}$$

Propriedades do Autovalor de Propagação:

- β: constante de propagação longitudinal do modo [rad/m];
- $n_{\text{eff}} = \beta / k_0$: índice de refração efetivo associado ao modo, onde $k_0 = 2\pi/\lambda_0$;
- **Condição Fundamental de Confinamento:**

$$n_{\text{clad}} < n_{\text{eff}} < n_{\text{core}}$$

Se $n_{\text{eff}} \leq n_{\text{clad}}$, a onda deixa de ser confinada e passa ao contínuo de radiação (*corte do modo*).

Conexão com Módulos de Eletromagnetismo

Comparativo: Guias Metálicos vs Guias Dielétricos

Em módulos anteriores, estudamos duas formas distintas de confinamento eletromagnético:

Guias Metálicos ([MOD-EM06]):

- Paredes condutoras (PEC);
- Condição de contorno: $E_{\parallel} = 0$ nas interfaces;
- Campo confinado internamente; sem penetração externa;
- Frequência de corte inferior bem definida para cada modo.

Guias Dielétricos (Fotônica):

- Confinamento por contraste de índice ($n_1 > n_2$);
- Reflexão Interna Total ([MOD-EM03]);
- Campo evanescente que penetra exponencialmente no revestimento;
- O modo fundamental TE_0 em guia simétrico não possui corte!

Modelo em Ziguezague e Auto-Consistência

Interferência Construtiva Transversal

Considere um núcleo de espessura d e índice n_1 entre revestimentos de índice n_2 ($n_1 > n_2$).

- A luz propaga-se por reflexão interna total com ângulo de incidência $\theta > \theta_c = \arcsin(n_2/n_1)$;
- A cada reflexão na interface, a onda sofre um deslocamento de fase $-2\phi_r$;
- Para que a frente de onda interfira construtivamente consigo mesma após um ciclo duplo de reflexão (ida e volta em x), a defasagem total acumulada deve ser múltiplo inteiro de 2π:

Condição de Auto-Consistência de Fase

$$2\,k_0\,n_1\,d\,\cos\theta - 2\phi_{r1} - 2\phi_{r2} = 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

O inteiro m define a ordem do modo guiado (TE_m ou TM_m).

Deslocamento de Fase de Goos-Hänchen

Fase Acumulada na Reflexão Interna Total ([MOD-EM03])

Ao incidir com ângulo $\theta > \theta_c$, o coeficiente de reflexão de Fresnel é complexo: $r = e^{-j2\phi_r}$.

As defasagens nas interfaces para polarizações TE e TM são dadas por:

$$\tan\phi_{\mathrm{TE}} = \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta - n_2^2}}{n_1 \cos\theta}, \quad \tan\phi_{\mathrm{TM}} = \frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta - n_2^2}}{n_1 \cos\theta}$$

- Essa defasagem é consequência direta do campo evanescente que penetra no meio 2;
- O feixe refletido sofre um deslocamento espacial lateral ao longo da interface, conhecido como **deslocamento de Goos-Hänchen** (Δz_{GH});
- O guia dielétrico comporta-se efetivamente como se possuísse uma espessura óptica aparente $d_{\mathrm{eff}} = d + 2/q > d$.

Equações de Onda para Modos Transversais Elétricos (TE)

Estrutura de Campo para Polarização TE

Para propagação ao longo de z ($e^{-j\beta z}$) e invariância em y ($\partial/\partial y = 0$):

- Componentes não nulas: $E_y(x)$, $H_x(x)$ e $H_z(x)$;
- Equação de Helmholtz transversal:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) E_y = 0$$

- Componentes magnéticas derivadas:

$$H_x(x) = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y(x), \quad H_z(x) = \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y(x)}{\partial x}$$

- As condições de contorno exigem a continuidade de E_y e H_z em todas as interfaces dielétricas.

Equações de Onda para Modos Transversais Magnéticos (TM)

Estrutura de Campo para Polarização TM

Para propagação ao longo de z ($e^{-j\beta z}$) e invariância em y ($\partial/\partial y = 0$):

- Componentes não nulas: $H_y(x)$, $E_x(x)$ e $E_z(x)$;
- Equação de Helmholtz transversal:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n^2(x) - \beta^2) H_y = 0$$

- Componentes elétricas derivadas:

$$E_x(x) = \frac{\beta}{\omega\varepsilon(x)} H_y(x), \quad E_z(x) = -\frac{j}{\omega\varepsilon(x)} \frac{\partial H_y(x)}{\partial x}$$

- A componente E_x é descontínua nas interfaces devido à variação de permissividade: $\varepsilon_1 E_{x1} = \varepsilon_2 E_{x2}$.

Soluções Modais em Guia Planar Simétrico

Definição dos Vetores de Onda Transversais

$$h = \sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \quad \text{(no núcleo)}, \qquad q = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} \quad \text{(no revestimento)}$$

Para um guia simétrico centrado em $x = 0$ com espessura d (núcleo em $|x| \leq d/2$):

Modos Pares ($m = 0, 2, \ldots$)**:**

$$E_y(x) = \begin{cases} A\cos(hx), & |x| \leq d/2 \\ Ce^{-q|x|}, & |x| > d/2 \end{cases}$$

Continuidade em $x = d/2$:

$$\tan(hd/2) = q/h \quad \text{(TE)}$$

Modos Ímpares ($m = 1, 3, \ldots$)**:**

$$E_y(x) = \begin{cases} B\sin(hx), & |x| \leq d/2 \\ \pm Ce^{-q|x|}, & |x| > d/2 \end{cases}$$

Continuidade em $x = d/2$:

$$\cot(hd/2) = -q/h \quad \text{(TE)}$$

Equações de Dispersão Transcendentes para Modos TM

Continuidade do Campo Elétrico Descontínuo

Para modos TM, a imposição da continuidade de H_y e E_z nas interfaces $x = \pm d/2$ introduz a razão de permissividades:

Relações Transcendentes para Modos TM

$$\tan(hd/2) = \frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{q}{h} \text{ (Pares)}, \quad \cot(hd/2) = -\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{q}{h} \text{ (Ímpares)}$$

- O fator $(n_1/n_2)^2$ desloca os autovalores de modos TM em relação aos modos TE;
- Em silício ($n_1 \approx 3{,}48$, $n_2 \approx 1{,}44$), $(n_1/n_2)^2 \approx 5{,}81$, gerando expressiva **birrefringência de forma**.

Os Parâmetros Universais V e b

Frequência Normalizada (V) e Índice Efetivo Normalizado (b)

Permitem expressar as soluções de guias dielétricos de forma invariante de escala:

$$V = k_0\, d\, \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{2\pi d}{\lambda_0}\mathrm{NA}, \quad b = \frac{n_{\mathrm{eff}}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \quad (0 \leq b \leq 1)$$

Propriedades Fundamentais do Parâmetro V:

- Para guia simétrico, o número de modos TE confinados é dado por:

$$M = 1 + \left\lfloor \frac{V}{\pi} \right\rfloor$$

- **Condição Monomodo:** Se $V < \pi \approx 3{,}1416$, apenas o modo fundamental TE_0 propaga-se;
- O modo fundamental TE_0 não possui frequência de corte em guias perfeitamente simétricos ($V_c = 0$).

Fator de Confinamento Óptico (Γ)

Fração de Potência Guiada no Núcleo Dielétrico

Mede a fração da potência óptica guiada que reside efetivamente dentro da região do núcleo:

$$\Gamma = \frac{\int_{-d/2}^{d/2} S_z(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} S_z(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_{-d/2}^{d/2} |E_y(x)|^2\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} |E_y(x)|^2\,\mathrm{d}x}$$

- Próximo ao corte ($V \to 0$): $b \to 0$ e $\Gamma \to 0$ (o campo espalha-se no revestimento);
- Longe do corte ($V \gg 1$): $b \to 1$ e $\Gamma \to 1$ (o campo é estritamente confinado no núcleo);
- **Aplicações:** Em moduladores e guias de transmissão busca-se $\Gamma \approx 0{,}8$ a $0{,}9$; em sensores de campo evanescente, busca-se maximizar a cauda externa $(1 - \Gamma)$.

Dimensões Típicas para Regime Monomodo

Parâmetros Dimensionais por Plataforma Tecnológica ($\lambda_0 = 1550$ nm)

Plataforma Material	**Núcleo / Revest.**	**Espessura** (d)	**Largura** (w)	**Índice Efetivo** (n_{eff})
Silício sobre Isolante (SOI)	Si / SiO_2	220 nm	450 nm	$\approx 2{,}44$ (TE_0)
Silício Espesso / Larga	Si / SiO_2	3,0 μm	3,0 μm	$\approx 3{,}45$
Nitreto de Silício (Si_3N_4)	Si_3N_4 / SiO_2	800 nm	1000 nm	$\approx 1{,}75$
Niobato de Lítio (TFLN)	$LiNbO_3$ / SiO_2	400 nm	1000 nm	$\approx 1{,}85$
Fosfeto de Índio (InP)	InGaAsP / InP	1,8 μm	1,8 μm	$\approx 3{,}24$
Polímero / Sílica	Polímero / SiO_2	3,0 μm	3,0 μm	$\approx 1{,}48$

- Materiais de alto contraste ($\Delta n \approx 2$) confinam a luz em centenas de nanômetros;
- Materiais de baixo contraste requerem dimensões micrométricas para suportar modos guiados.

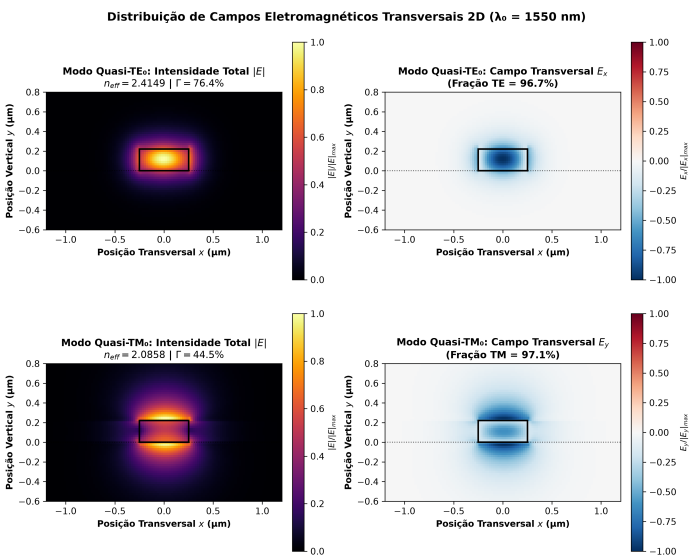
Transição de Guias 1D para Geometrias 2D Reais

Estruturas Utilizadas em Circuitos Fotônicos Integrados (PICs)

Na prática, o confinamento deve ocorrer tanto na vertical (x) quanto na horizontal (y):

- **Guia em Fita (*Strip Waveguide*):** Ataque total até a camada de BOX. Confinamento máximo e raio de curvatura reduzido ($R < 5\ \mu$m);
- **Guia em Nervura (*Rib / Ridge Waveguide*):** Ataque parcial do silício (deixando uma camada residual ou *slab*). Menor sensibilidade à rugosidade de borda e menor perda de propagação;
- **Guia de Fenda (*Slot Waveguide*):** Duas fitas de alto índice separadas por uma fenda nanométrica (< 50 nm) de baixo índice. A descontinuidade de $D_x = \varepsilon E_x$ concentra intensidade de campo óptico no interior da fenda!

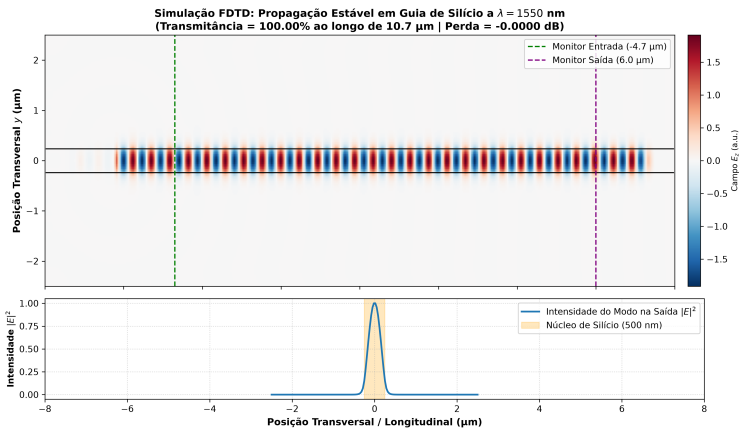
Perfis Modais Transversais 2D (Estudo 02)



Guia SOI 500 nm × 220 nm ($\lambda_0 = 1550$ nm)**:**

- **Modo Quasi-**TE_0**:**
  - $n_{\mathrm{eff}} = 2{,}4149$;
  - $\Gamma_{\mathrm{núcleo}} = 76{,}4\%$;
  - Fração TE: 96,7%.
- **Modo Quasi-**TM_0**:**
  - $n_{\mathrm{eff}} = 2{,}0858$;
  - $\Gamma_{\mathrm{núcleo}} = 44{,}5\%$;
  - Fração TM: 97,1%.
- Birrefringência geométrica: $\Delta n_{\mathrm{eff}} = 0{,}3291$.

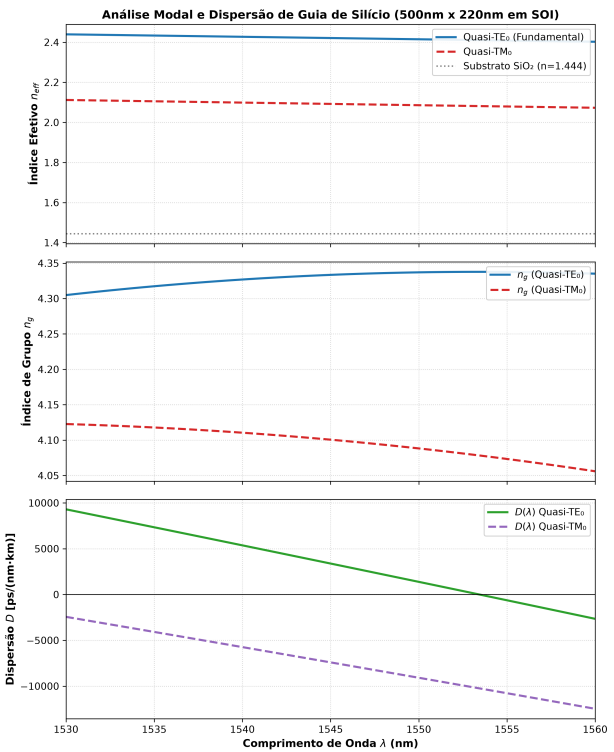
Propagação FDTD em Guia de Silício (Estudo 02)



Simulação FDTD no Tempo (PyMeep)**:**

- Comprimento: 10,7 μm;
- Transmitância: 100,00%;
- Perda numérica: 0,000 dB;
- Frente de onda monomodal estável;
- Fronteiras perfeitamente casadas (PML);
- Decaimento evanescente estrito em SiO_2.

Dispersão Cromática e Índice de Grupo (Estudo 02)



Banda C $(1530 - 1560\ \text{nm})$**:**

- **Índice de Grupo** (n_g)**:**
  - Quasi-TE_0: $n_g \approx 4{,}335$;
  - Quasi-TM_0: $n_g \approx 4{,}087$;
- **Dispersão Cromática** (D)**:**
  - Quasi-TE_0: cruza $D \approx 0$ ps/(nm · km) em 1550 nm;
  - Quasi-TM_0: dispersão fortemente normal ($D \approx -10\,340$ ps/(nm · km)).
- A dispersão de guia supera amplamente a dispersão material.

Síntese do Módulo [MOD-PH02]

Pontos Fundamentais

A modelagem analítica e transcendental de guias planares fornece a base física para a compreensão de circuitos fotônicos integrados.

Conclusões:

- Os modos ópticos são soluções autofunções invariantes em perfil transversal, caracterizados por seu autovalor n_{eff};
- A condição de corte e o número de modos são determinados analiticamente pela frequência normalizada V;
- A birrefringência geométrica faz com que modos TE e TM possuam índices efetivos e fatores de confinamento distintos na mesma guia;
- No próximo módulo ([MOD-PH03]), utilizaremos métodos numéricos (FEM com `Femwell`, FDTD com `PyMeep` e EME com `MEOW`) para resolver geometrias bidimensionais completas.

Referências Bibliográficas

1. Marcuse, D. (1974). *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. Academic Press, New York.
2. Yariv, A., & Yeh, P. (2007). *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*. Oxford University Press.
3. Chrostowski, L., & Hochberg, M. (2015). *Silicon Photonics Design: From Devices to Systems*. Cambridge University Press.
4. Osgood Jr., R. M., & Meng, X. (2021). *Principles of Photonic Integrated Circuits*. Springer Nature.
5. Rumpf, R. C. (2022). *Electromagnetic and Photonic Simulation for the Beginner: Finite-Difference Frequency-Domain in MATLAB*. Artech House.
6. Vivien, L., & Pavesi, L. (Eds.). (2013). *Handbook of Silicon Photonics*. CRC Press.