UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA (DEE)

[MOD-PH04] Teoria de Modos Acoplados em Fotônica Integrada

Fundamentos Históricos, Dedução Rigorosa, Acoplamento Co/Contra-Direcional e Aplicações

Prof. Marcelo Eduardo Vieira Segatto

LabTel — Laboratório de Telecomunicações | IN-Foton





Sumário do Módulo [MOD-PH04]

1. Evolução Histórica da Teoria (CMT)
2. Fundamentos Físicos e Formulação
3. Coeficiente de Acoplamento Kappa
4. Soluções Analíticas e Transferência de Potência
5. Acoplamento Contra-Direcional
6. Formalismo Matricial [S] e [T]
7. Aplicações Práticas da CMT

Origens em Micro-ondas e Guia de Ondas

John R. Pierce (1954) — Válvulas TWT e Micro-ondas

A Teoria de Modos Acoplados (*Coupled-Mode Theory* — CMT) nasceu com o trabalho seminal de John R. Pierce para tubos de ondas progressivas (*Traveling Wave Tubes* — TWTs), modelando a troca de energia entre feixes de elétrons e campos eletromagnéticos guiados.

Marcos Históricos da Consolidação:

- **Stewart E. Miller (1954):** Introduziu a teoria para circuitos de micro-ondas multiguiados na Bell Labs, demonstrando acoplamento direcional passivo.
- **Dietrich Marcuse (1974):** Generalizou a formulação estatística e modal para guias de onda dielétricos imperfeitos e fibras ópticas com perdas por rugosidade superficial.

A Sistematização em Óptica Integrada e Silício

Amnon Yariv (1973) — O Marco da Fotônica Integrada

Yariv unificou o formalismo da CMT aplicável a guias ópticos planares, grades de difração, lasers de realimentação distribuída (DFB) e óptica não linear, demonstrando que perturbações dielétricas governam trocas espaciais de potência.

Evolução Moderna em Silício (SOI):

- **Haus e Huang (1985–1991):** Em alto contraste ($\Delta n \approx 2{,}0$), os modos individuais não são estritamente ortogonais, exigindo a CMT Vetorial Não-Ortogonal.

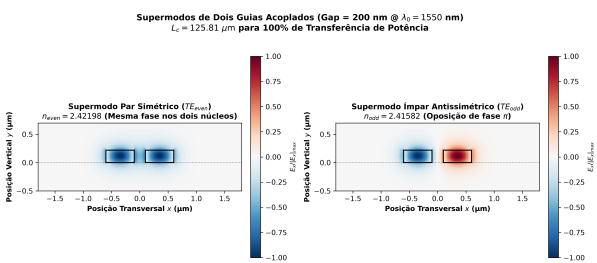


Figura 1: Supermodos em guias SOI acoplados.

Perturbação de Permissividade e Decomposição Modal

Considere dois guias paralelos, isolados a e b. A estrutura acoplada total possui permissividade $\epsilon(x,y) = \epsilon_0 n^2(x,y)$.

Expansão Perturbativa do Campo Eletromagnético

O campo transversal total é decomposto na base dos modos não perturbados:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \left[A_1(z)\,\mathcal{E}_1(x,y)\,e^{-j\beta_1 z} + A_2(z)\,\mathcal{E}_2(x,y)\,e^{-j\beta_2 z}\right] e^{j\omega t}$$

Premissas da Variação Lenta de Amplitude (SVEA):

- Acoplamento fraco a moderado: $\left|\frac{d^2 A_m}{dz^2}\right| \ll \beta_m \left|\frac{dA_m}{dz}\right|$.
- A perturbação dielétrica sentida pelo guia 1 é $\Delta\epsilon_1(x,y) = \epsilon(x,y) - \epsilon_1(x,y)$, correspondendo à presença do núcleo do guia 2.

Dedução via Reciprocidade de Lorentz

Aplicando o Teorema de Reciprocidade de Lorentz entre o campo real perturbado e o modo não perturbado sobre a seção transversal S_∞:

$$\frac{d}{dz}\iint_{S_\infty}(\mathbf{E}\times\mathcal{H}_1^*+\mathbf{E}_1^*\times\mathbf{H})\cdot\hat{\mathbf{z}}\,dx\,dy=-j\omega\iint_{S_\infty}\Delta\epsilon_1(x,y)\,\mathbf{E}\cdot\mathcal{E}_1^*\,dx\,dy$$

Equações Diferenciais de Modos Acoplados (Co-Direcionais)

Introduzindo as integrais de normalização de potência P_0:

$$\frac{dA_1}{dz}=-j\kappa_{12}\,A_2(z)\,e^{j\Delta\beta z},\qquad\frac{dA_2}{dz}=-j\kappa_{21}\,A_1(z)\,e^{-j\Delta\beta z}$$

onde $\Delta\beta=\beta_1-\beta_2$ é o descasamento de fase propagante.

A Integral de Sobreposição Espacial

O coeficiente de acoplamento mútuo κ_{pq} quantifica a sobreposição da cauda evanescente do modo q com o núcleo dielétrico do guia p:

Definição Integral Canônica

$$\kappa_{12} = \frac{\omega \epsilon_0}{4P_0} \iint_{\text{núcleo 1}} \left(n_{\text{core}}^2 - n_{\text{clad}}^2\right) \mathcal{E}_1^*(x,y) \cdot \mathcal{E}_2(x,y)\, dx\, dy$$

Propriedades Fundamentais de κ:

- **Conservação de Energia:** Em guias sem perdas, $\kappa_{12} = \kappa_{21}^* = \kappa$.
- **Decaimento Exponencial com o Gap g:**

$$\kappa(g) \approx \kappa_0 \exp(-\gamma\, g), \quad \text{onde } \gamma = k_0 \sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_{\text{clad}}^2}$$

Em SOI ($\lambda = 1550$ nm), $\gamma^{-1} \approx 60$ a 100 nm, tornando κ ultrassensível ao gap.

Evolução de κ e Sensibilidade ao Processo

Impacto do Gap Litográfico

- $g = 150$ nm $\implies$ $L_c \approx 8{,}5\,\mu$m.
- $g = 200$ nm $\implies$ $L_c \approx 18{,}2\,\mu$m.
- $g = 300$ nm $\implies$ $L_c \approx 85{,}0\,\mu$m.

Tolerância de Fabricação: Uma variação de ± 10 nm na litografia altera a razão de divisão de potência em mais de 15%.

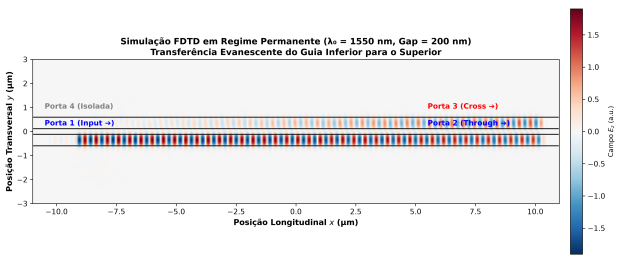


Figura 2: Simulação FDTD da transferência de campo em guias acoplados.

Guias Síncronos ($\Delta\beta = 0$): Transferência Perfeita

Para dois guias idênticos excitados na porta 1 [$A_1(0) = 1$, $A_2(0) = 0$]:

$$A_1(z) = \cos(\kappa z), \qquad A_2(z) = -j\,\sin(\kappa z)$$

Distribuição de Potência Óptica nas Portas

$$P_{\text{bar}}(z) = |A_1(z)|^2 = \cos^2(\kappa z), \qquad P_{\text{cross}}(z) = |A_2(z)|^2 = \sin^2(\kappa z)$$

Comprimentos Críticos de Projeto:

- **Comprimento de Transferência Total (100% Cross):**
  $L_c = \frac{\pi}{2\kappa} \implies P_{\text{cross}}(L_c) = 1, \quad P_{\text{bar}}(L_c) = 0.$
- **Divisor de Potência 3 dB (Acoplador 50:50):**
  $L_{3\text{dB}} = \frac{L_c}{2} = \frac{\pi}{4\kappa} \implies P_{\text{bar}} = P_{\text{cross}} = 0{,}5.$

Guias Descasados ($\Delta\beta \neq 0$): Transferência Incompleta

Se os guias possuem larguras distintas ($\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 \neq 0$), definindo $q = \sqrt{\kappa^2 + (\Delta\beta/2)^2}$:

Potência Transferida com Descasamento

$$P_{\text{cross}}(z) = \frac{\kappa^2}{q^2}\sin^2(qz) = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + (\Delta\beta/2)^2}\sin^2(qz)$$

Consequências Físicas:

- **Transferência Máxima:** $F = \frac{\kappa^2}{\kappa^2+(\Delta\beta/2)^2} < 1$.
- **Comprimento Encurtado:** $L_c' = \frac{\pi}{2q} < L_c$.
- Se $|\Delta\beta| \gg \kappa$, a troca de potência cessa.

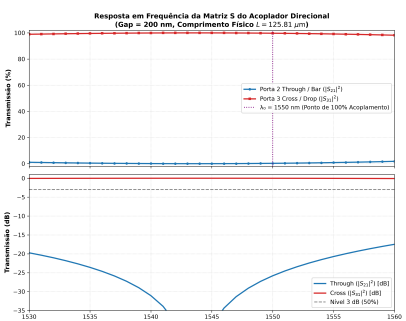


Figura 3: Resposta espectral e descasamento.

Modos Contra-Propagantes e Grades de Difração

No acoplamento contra-direcional, o modo incidente $A^+(z)$ transfere potência para o modo refletido $A^-(z)$ através de uma perturbação periódica de passo Λ:

Equações Diferenciais de Bragg (Contra-Direcionais)

$$\frac{dA^+}{dz} = -j\kappa\, A^-(z)\, e^{j\Delta\beta z}, \qquad \frac{dA^-}{dz} = +j\kappa^*\, A^+(z)\, e^{-j\Delta\beta z}$$

onde o descasamento de Bragg é $\Delta\beta = 2\beta - \frac{2\pi m}{\Lambda}$.

Condição de Ressonância de Bragg de 1ª Ordem ($m = 1$):

$$\lambda_{\text{Bragg}} = 2\, n_{\text{eff}}\, \Lambda$$

Em SOI ($n_{\text{eff}} \approx 2{,}45$), para $\lambda_0 = 1550$ nm, o período da grade é $\Lambda \approx 316$ nm.

Soluções Hiperbólicas e Banda Proibida Fotônica

Com condição de contorno $A^+(0) = 1$ e $A^-(L) = 0$:

Refletividade de Pico ($\Delta\beta = 0$)

$$R = \left|\frac{A^-(0)}{A^+(0)}\right|^2 = \tanh^2(|\kappa|\, L)$$

Largura de Banda da Stopband:

$$\Delta\lambda_{\text{gap}} = \frac{\lambda_0^2}{\pi n_g}\sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$$

Base de filtros notch e espelhos de cavidade em PICs.

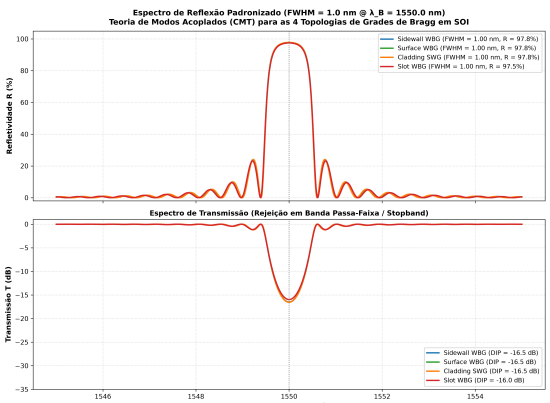


Figura 4: Espectro de reflexão e transmissão.

Matriz de Espalhamento [S] do Acoplador de 4 Portas

Relacionando as amplitudes complexas de onda incidente (a_i) e refletida/transmitida (b_i):

Matriz de Espalhamento Unitária e Recíproca

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t & -j\kappa_{\mathrm{m}} \\ 0 & 0 & -j\kappa_{\mathrm{m}} & t \\ t & -j\kappa_{\mathrm{m}} & 0 & 0 \\ -j\kappa_{\mathrm{m}} & t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

onde $t = \cos(\kappa L)$ e $\kappa_{\mathrm{m}} = \sin(\kappa L)$.

Propriedade Fundamental de Conservação:

$$|t|^2 + |\kappa_{\mathrm{m}}|^2 = 1 \implies \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{I} \quad \text{(sem perdas)}$$

A defasagem intrínseca de 90° (termo $-j$) entre portas bar e cross é fundamental para interferômetros MZI.

Acopladores 3 dB, WDM e Chaves Eletro-ópticas

1. Divisores 3 dB e Roteadores

Ajustando $L = L_c/2$, obtém-se divisão $50:50$ com defasagem relativa de $\pi/2$.

2. Multiplexadores WDM Assimétricos

Guias com diferentes larguras cujas curvas $\beta(\lambda)$ se cruzam em λ_{res}:

$$\Delta\beta(\lambda_{\text{res}}) = 0 \implies \text{Troca seletiva}$$

3. Chave Eletro-Óptica $\Delta\beta$

Modulação de portadores altera o índice e induz descasamento:

$$\Delta\beta\, L = \sqrt{3}\,\pi \implies \text{Saída Bar}$$

4. Conversores de Modo e Polarização

Perturbações periódicas acoplam $\text{TE}_0 \leftrightarrow \text{TE}_1$ ou $\text{TE} \leftrightarrow \text{TM}$.

Acoplamento em Ressonadores e Grades

Acoplamento Guia-Anel em Microrressonadores

A CMT descreve o acoplamento evanescente no ponto tangente:

$$E_{\text{out}} = r\,E_{\text{in}} - j\kappa\,E_{\text{cav}}$$

Acoplamento Crítico: Ocorre quando a perda interna por volta do anel a iguala o coeficiente de transmissão do acoplador ($r = a$).

Filtros de Bragg: Reflexão seletiva estreita para estabilização de laser DFB.

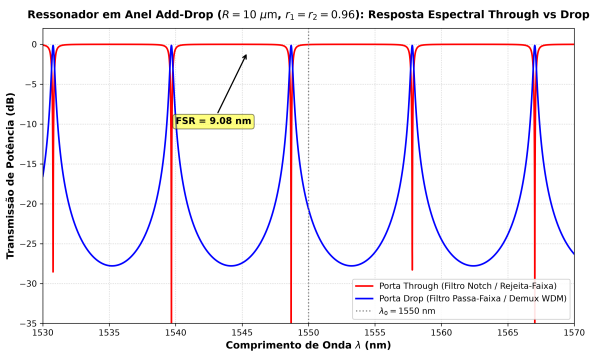


Figura 5: Espectro de ressonância em anel acoplado.

Interações Ópticas Não Lineares via CMT

A CMT estende-se naturalmente para processos paramétricos não lineares ($\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$):

Processos de Três e Quatro Ondas

- **Geração de Segundo Harmônico (SHG):** Acoplamento não linear de amplitudes $\omega + \omega \rightarrow 2\omega$.
- **Mistura de Quatro Ondas (FWM):** Conversão de comprimento de onda e geração de pentes de frequência em microrressonadores de silício / nitreto de silício.
- **Casamento de Fase Não Linear:** $\Delta\beta = 2\beta(\omega) - \beta(2\omega) = 0$.

Importância Prática: Permite sintetizar fontes ópticas integradas em bandas fora da emissão direta de semicondutores.

Tabela Síntese das Configurações de CMT

Regime	**Direção**	**Soluções Matemáticas**	**Dispositivos Tecnológicos**
Síncrono ($\Delta\beta = 0$)	Co-direcional	$\sin(\kappa z), \cos(\kappa z)$	Acopladores 3 dB, Chaves ópticas
Assíncrono ($\Delta\beta \neq 0$)	Co-direcional	Parâmetro de batimento q	Filtros WDM, Sensores interferométricos
Periódico (Bragg)	Contra-direcional	$\sinh(\kappa z), \cosh(\kappa z)$	Filtros DBR/DFB, Grades de Bragg
Cavidade / Anel	Recirculante	Auto-consistência de campo	Microrressonadores em anel add-drop
Perturbação Assimétrica	Co-direcional	Acoplamento intermodal	Conversores de modo $\mathrm{TE}_0 \rightarrow \mathrm{TE}_1$
Não Linear ($\chi^{(2)}, \chi^{(3)}$)	Paramétrico	Amplitudes acopladas	SHG, FWM, Pentes de frequência Kerr

Conclusão e Próximos Passos

Resumo Conceitual do Módulo [MOD-PH04]

- A Teoria de Modos Acoplados (CMT) é a ferramenta analítica basilar para projetar dispositivos por proximidade evanescente ou perturbação periódica.
- O coeficiente κ varia exponencialmente com o gap, exigindo tolerâncias nanométricas no processo de fabricação em SOI.
- A defasagem intrínseca de 90° entre portas bar e cross permite projetar matrizes unitárias sem reflexão indesejada.

Relação com o Próximo Módulo [MOD-PH05]

No módulo seguinte, utilizaremos os conceitos da CMT para explorar detalhadamente todos os **Dispositivos Passivos de Silício**: curvas Euler, tapers adiabáticos, acopladores direcionais, divisores MMI e interferômetros MZI.